ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЗАЧЕТНАЯ КНИЖКА

Шпаргалки

ЗАЧЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЗАЧЕТ

аст
издательство
МОСКВА
«Астрель-СПб»
Санкт-Петербург
ВКТ Владимир

УДК 51
ББК 22.1
В83

В83 Высшая математика. Шпаргалки. – М.: АСТ; СПб.: Астрель-СПб; Владимир: ВКТ, 2012. – 32 с.

ISBN 978-5-17-070480-4 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-9725-1870-8 (ООО «Астрель-СПб»)
ISBN 978-5-226-03349-0 (ВКТ)

В этой книге кратко изложены ответы на основные вопросы по теме «Высшая математика». Издание поможет быстро систематизировать знания, полученные на лекциях и семинарах и легко подготовиться к сдаче экзамена или зачета.

Пособие адресовано студентам высших и средних образовательных учреждений, а также всем, интересующимся данной тематикой.

Популярное издание
Высшая математика
Шпаргалки

Подписано в печать 12.01.12.
Формат 84x108$^1/_{32}$. Усл. печ. л. 1,68.
Доп. тираж(2-й) 7000 экз. Заказ № 2933и.

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 1; 953000 – книги, брошюры

ООО «Издательство АСТ»
127006, Россия, г. Москва,
Ул. Садовая-Триумфальная, д. 4-10
Конт. тел. +7(499) 992-79-93
Наши электронные адреса:
WWW.AST.RU
E-mail: astpub@aha.ru

ООО «Астрель-СПб»
198096, Санкт-Петербург, ул. Кронштадтская,
д. 11, лит. А
E-mail: mail@astrel.spb.ru

ОАО «Владимирская книжная типография».
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7.
Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов

СОДЕРЖАНИЕ

25. Метод наименьших квадратов. Интерполяция. Многочлен Лагранджа
26. История интегрального исчисления
27. Понятие интеграла и его виды
28. Свойства определенного интеграла
29. Неопределенный интеграл, правила интегрирования
30. Интегралы Римана, Лебега, Стилтьеса
31. Несобственные интегралы. Гамма-функция

7. Типы матриц
8. Исчисление и преобразование матриц
9. Определитель матрицы
10. Линейное дифференциальное уравнение
11. Понятие функции
12. Теория функций
13. Графики
14. Элементарные функции
15. Функциональные уравнения
16. Функциональный анализ
17. История дифференциального исчисления

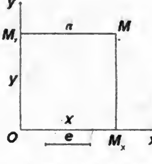
53. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины
54. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины
55. Случайная функция и ковариационная функция
56. Генеральная совокупность и выборка. Генеральные и выборные средние и дисперсии

40. Композиция N независимых испытаний
41. Случайная величина. Дискретные случайные величины и их вероятностные характеристики
42. Математическое ожидание. Свойства математического ожидания
43. Модели распределения Пуассона
44. Непрерывные случайные величины
45. Комплексные числа

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Основные понятия в аналитической геометрии — это простейшие геометрические образы: точки, прямые, плоскости, кривые и поверхности второго порядка.

Основными средствами исследования в аналитической геометрии являются методы элементарной алгебры и метод координат. Сущность метода координат состоит в следующем — рассмотрим на плоскости ϖ две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy.



Эти две прямые с указанным направлением, точкой начала координат O и масштабной единицей e образуют декартову прямоугольную систему координат на плоскости Oxy. Прямая Ox называется осью абсцисс, прямая Oy — осью ординат. Положение любой точки M на плоскости можно определить по отношению к этой системе координат.

Декартову систему координат ввел в использование французский ученый Рене Декарт. Кроме координат точки, рассматривают также координаты прямой, плоскости и других геометрических объектов. Также в теоретической механике рассматриваются координаты механических систем.

Координаты точки, прямой и плоскости в пространстве

Общие декартовы координаты в трехмерном пространстве вводятся заданием точки начала координат O и трех векторов $e_x = \overline{OA}$, $e_y = \overline{OB}$ и $e_z = \overline{OC}$, не лежащих в одной плоскости. Координата точки M определяется следующим вектором

$$\overline{OM} = xe_x + ye_y + ze_z$$

Есть два различных типа трехмерных координат. Первая — e_x и e_y лежат в плоскости страницы, e_y направлен вправо, e_x направлен к читателю.

2. ПОНЯТИЕ КООРДИНАТЫ

Координаты (от латинского *co (cum)* — совместно, и *ordinates* — упорядоченный, определенный) — числа, заданием которых определяется положение точки в пространстве (на плоскости, поверхности).

Кроме координат точки, рассматривают также координаты прямой, плоскости и других геометрических объектов.

Наиболее распространенную систему координат — декартову систему координат — ввел в использование французский ученый Рене Декарт.

Выберем в пространстве точку O и назовем ее началом координат. Введем два линейно независимых вектора $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$. Координатами произвольной точки M будут два числа – X(абсцисса) и Y(ордината), определяемые следующим образом: проведем два вектора $\overline{MX'}$ и $\overline{MY'}$ перпендикулярно векторам $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$ так, чтобы точки X' и Y' лежали на продолжении векторов $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$ соответственно. Расстояние от точки X' до O, поделенное на длину вектора $\overline{OX}$, и будет абсциссой, а от Y' до O, поделенное на длину $\overline{OY}$, будет ординатой. Заметим, что вектора $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$ могут быть не перпендикулярны и иметь различную длину, таким образом, четырехугольник с углами (0;0), (0;1), (1;0) и (1;1) может не быть прямоугольником или ромбом, а сторона его может иметь не единичную длину.

Декартова система координат с векторами, имеющими единичную длину, называется нормированной. Если вектора перпендикулярны — ортогональной или прямоугольной. Привычная система координат является ортонормированной и вышеприведенный четырехугольник в ней является квадратом.

Кроме декартовой, достаточно часто используется так называемая полярная система координат.

3. СИСТЕМА КООРДИНАТ. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ

Координаты – числа, величина которых определяет положение данной точки на плоскости, прямой или кривой линии, любой поверхности или в пространстве.

Значение координаты зависит от **начальной точки отсчета, положительного направления** и **единицы масштаба.**

Первыми употреблявшимися координатами были географические и астрономические. В XIV веке нашей эры Н. Орем начал пользоваться координатами при построении графиков. Прочно вошли в использование координаты в геометрии на плоскости только в XVII веке. Развитие использования систем координат является заслугой Рене Декарта.

Система координат:

1. Декартова, в свою очередь подразделяется на:
   a. Прямоугольную (состоит из двух взаимноперпендикулярных прямых – осей. Точка пересечения осей – начало координат. OX – ось абсцисс, OY – ось ординат. На осях задается масштаб и положительное направление. Пересечение осей дает четыре координатных угла I,II,III,IV – квадранта. I – оба значения (x,y) – положительные, II – x – отрицательное, y – положительное, III – x – отрицательное, y – отрицательное, IV – x – положительное, y – отрицательное. У точки, лежащей на одной из осей, значение по другой оси будет нулевым.)
   b. Косоугольную система координат – аналогична прямоугольной, но угол пересечения не является прямым.

Полярную (состоит из полярной оси OX и полюса O, через который проведена ось. Положение точки в этой системе определяется полярным ра-

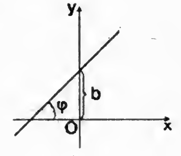
4. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Линейная функция – это функция вида $y = kx+b$.

Будучи достаточно простыми для изучения, они породили, например, такие области математики, как дифференцирование, одной из задач которого как раз является замена функции в точке близкой к ней линейной.

Основное свойство линейной функции – **приращение функции пропорционально приращению аргумента.**

При равных масштабах осей координат коэффициент k равен тангенсу угла образованного прямой с осью Ox, а b равен отрезку, отсекаемому прямой на оси Oy.



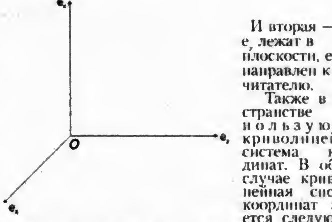
При $b = 0$, линейная функция называется однородной и её график изображает пропорциональную зависимость: $y = kx$.

Линейная вектор-функция – это функция $f(x)$ векторного переменного x, обладающая следующими свойствами

1. $f(x+y) = f(x)+f(y)$
2. $f(\lambda x)=\lambda f(x)$, где λ – константа.
3. Вышеперечисленные свойства и есть свойства линейности, давшие название классу функций.

В ней вводится точка О, являющаяся началом координат, вектор $\overline{ox}$, но второго вектора нет. Положение точки М на плоскости задается расстоянием от М до О, поделенным на длину вектора $\overline{ox}$ и углом между вектором $\overline{ox}$ и вектором $\overline{om}$. При этом, угол отсчитывается против часовой стрелки, и может принимать значения из полуинтервала [0c; 360c). Для точки О угол не определен. В случае если вектор $\overline{ox}$ имеет длину один, полярная система координат также является нормированной. Несложно перевести координаты точки из нормированной полярной в ортонормированную декартову и, наоборот, в случае, если вектора $\overline{ox}$ равны и начала координат совпадают. Пусть координаты точки М в декартовой системе (x,y) и (r,f) в полярной. Тогда

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0); \quad \varphi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & y < 0 \end{cases} \quad (x = 0) \end{cases}$$



И вторая – e_x и e_y лежат в плоскости, e_v направлен к читателю.

Также в пространстве используются криволинейная система координат. В общем случае криволинейная система координат задается следующим образом: пусть q_1, q_2, q_3 — некие криволинейные координаты, которые мы будем считать заданные непрерывно дифференцируемыми функциями от x, y, z. Для того, чтобы три функции q_1, q_2, q_3 служили координатами в некоторой области пространства, необходимо существование обратного отображения:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(q_1, q_3, q_3); \\ y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3); \\ z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3); \end{cases}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — функции, определенные в некоторой области наборов (q_1, q_2, q_3) координат.

Из принципа двойственности, устанавливающего равноправность точек и прямых в геометрии трех измерений, можно вывести следующее: с помощью определенных координат можно задать положение прямой или плоскости. Для примера возьмем уравнение прямой, не проходящей через точку начала координат, приведенное к виду $ux+vy+1=0$ ($u = -1/a$, $v = -1/b$, где a и b отрезки, отсекаемые прямой на осях координат). Числами u и v можно определить положение прямой, то есть пара чисел (u,v) является координатами прямой на плоскости. То же самое возможно для координат плоскостей и трехмерных пространств.

4. k является тангенсом угла, который образует прямая с положительным направлением оси абсцисс.
5. При $k > 0$, прямая образует острый угол с осью абсцисс.
6. При $k < 0$, прямая образует тупой угол с осью абсцисс.
7. При $k = 0$, прямая параллельна оси абсцисс
8. b является показателем ординаты точки пересечения прямой с осью ординат.
9. При $b = 0$, прямая проходит через начало координат.

Линейная функция в трёхмерном пространстве задаёт плоскость, в четырёхмерном – пространство и т. д.

Линейная вектор-функция в n-мерном пространстве определяется значениями, принимаемыми ею для n независимых векторов. Скалярная линейная вектор-функция называется так же линейным функционалом, в n-мерном пространстве имеет вид fx= a1x1+a2x2+...+anxn, где x1...xn координаты вектора x.

Полилинейной (билинейной, трилинейной и т.д.) вектор-функцией называют функцию нескольких векторных переменных, являющуюся вектор функцией относительно каждого своего аргумента.

Если определить сумму линейных вектор-функций f(x) и g(x), как линейную вектор функцию Fx+g(x) (где Fx произведение f(x) и постоянного вектора a), а произведение тех же функций как линейную вектор функцию gf(x), то сумме этих функций будет соответствовать сумма соответствующих матриц, а произведению – произведение соответствующих матриц.

диусом р и полярным углом φ (значение от $-\pi$ до π), φ и р – полярные координаты заданной точки.

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$)

Помимо координат точки используются так же прямой, плоскости и любых геометрических объектов, механических систем.

В аналитической геометрии в системе координат рассматриваются алгебраические линии первого и второго порядка определяющиеся алгебраическими уравнениями первого и второго порядка соответственно, а так же алгебраические поверхности первого и второго порядка.

5. ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Линейное преобразование переменных $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ — замена переменных на новые $x_1, x_2, \dots, x_n$, через которые первоначальные переменные выражаются линейно.

$$x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \cdots + a_{1n}x'_n + b_1$$
$$x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \cdots + a_{2n}x'_n + b_2$$
$$x_n = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \cdots + a_{nn}x'_n + b_n,$$

где a_{ij} и b_i (i, j = 1, 2, ..., n) — произвольные числовые коэффициенты.

Если $b_1, b_2, \dots, b_n$ — нулевые, то линейное преобразование — однородное.

В качестве примера линейного преобразования можно рассмотреть формулы преобразования прямоугольных координат на плоскости:

$$x = x' cos a - y' sin a + a,$$
$$y = x' sin a + y' cos a + b.$$

В случае векторов и векторного пространства линейные преобразования называют законом: вектору x из n-мерного пространства ставят в соответствие новый вектор x', координаты которого линейно и однородно выражаются через координаты x:

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n$$
$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n$$
$$x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n$$

Или: $x' = Ax$.

Для векторного пространства линейные преобразования определяются без использования системы координат: $x \to y = Ax$, если $A(x + y) = Ax + Ay$ и $A(\alpha x) = \alpha A(x)$, для любых векторов x и

6. МАТРИЦА

Матрица, как понятие, была предложена в середине XIX века математиками Уильямом Гамильтоном и Артуром Кэли.

Фундаментальные основы теории матриц были сформированы во второй половине XIX — начале XX вв. Вейерштрассом, Жорданом и Фробениусом. Термин матрица появился в 1850 году, его ввел Джеймс Сильвестр.

Матрица — это система величин a_{ij}, над которыми можно выполнить математические операции, расположенных в виде прямоугольной схемы. Элементами матрицы могут быть числа, функции или даже другие матрицы.

Говорят об (nm)-матрице, если матрица имеет m строк и n столбцов. Обозначаются матрицы следующим образом:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

или

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или $\|a_{ij}\|$, (a_{ij}), в короткой записи.

Матрица может быть конечной или бесконечной.

При m = 1 матрица называется строкой, при n = 1 — столбцом. При m = n матрица называется квадратной, а n называется порядком матрицы. Квадратная матрица, у которой отличны от нуля только диагональные элементы, называется диагональной. Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, называется единичной матрицей и обозначается E. Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой матрицей.

7. ТИПЫ МАТРИЦ

1. Антиперрестановочная $AB = -BA$
2. Единичная (квадратная матрица вида $E = (e_{ij})$ элементы главной диагонали которой равны единице поля, а остальные равны нулю)
3. Бинарная (матрица, элементами которой являются 0 или 1)
4. Блочно-диагональная (квадратная матрица, каждый элемент которой является подматрицей меньшей кратной размерности)
5. Ганкелева (квадратная матрица, у которой на всех диагоналях, перпендикулярных главной, стоят равные элементы)
6. Вырожденная (квадратная матрица, определитель которой равен нулю)
7. Диагональная (квадратная матрица, все недиагональные элементы которой равны нулю)
8. Заполненная (матрица, которая практически не содержит нулей)
9. Квадратная (матрица, количество строк в которой равно количеству столбцов)
10. Коммутирующая (AB=BA)
11. Кососимметрическая (квадратная матрица A над полем k характеристики, отличной от 2, удовлетворяющая условию $A^T = -A$, где A^T — транспонированная матрица)
12. Ленточная (квадратная матрица шириной d, все элементы которой, расположенные ниже d-ой поддиагонали и выше d-ой наддиагонали, равны нулю)
13. Нормальная (квадратная комплексная матрица A, удовлетворяющая условию — для некоторой унитарной матрицы Q, матрица Q^*AQ будет диагональной)
14. Нулевая (матрица размера $m \times n$, все элементы которой равны нулю)
15. Ортогональная (квадратная матрица A с действительными элементами, при умножении которой на A^Tрезультатом будет единичная матрица)
16. Перестановочная (квадратная бинарная матри-

8. ИСЧИСЛЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦ

Одной из задач, решаемых с помощью матриц, является задача нахождения решения систем линейных алгебраических уравнений.

$AX = F$,

где **A** — матрица коэффициентов, **X** — искомое решение в виде столбца из n элементов, **F** — столбец свободных членов из m элементов.

Для квадратной невырожденной матрицы A существует единственное решение вида

$X = A^{-1}F$.

Для прямоугольной матрицы ранга k может существовать несколько решений или не существовать ни одного. В первом варианте выбирают нормальное решение (решение с наименьшей суммой квадратов).

Нормальное обобщенное решение находится по формуле

X = A + F

В случае k = n < m это решение единственно. В обратном случае k = m < n (неопределенная система) формула X = A + F дает нормальное решение из бесконечно большого количества точных решений.

Не менее важной для различных приложений, таких как квантовая механика, теория дифференциальных уравнений и т.д., является задача решения частичной или полной (с ней в свою очередь связана задача преобразования квадратной матрицы к канонической форме) проблемы собственных значений. При этом необходимо найти все или часть собственных значений матрицы и собственные или корневые векторы, им принадлежащие. Также важна обобщенная проблема собственных значений, для решения которой необходимо найти векторы и числа, такие как AX=IBX, где A и B — заданные величины.

Все вышеперечисленное привело к появлению большого количества методов нахождения численного решения этих задач.

Действия над матрицами:

Произведением матрицы А на число б называют матрицу, полученную произведением всех элементов матрицы А на число б.

Суммой двух матриц одинакового строения ($m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$) называется матрица, полученная сложением соответствующих элементов двух матриц.

Произведение матриц определено только для матриц (m x p) и (p x n), то есть прямоугольных матриц, у которых число столбцов первого множителя равно числу строк второго. Произведением двух матриц А и В будет матрица $C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj}$; $i = 1,..., m$; $j = 1,...,n$.

Действия над матрицами обладают свойствами действий над числами, за исключением коммутативности — произведение АВ может быть не равно произведению ВА. Если же это условие выполняется, матрицы называются перестановочными. Произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой матрицей. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.

у и любого числа α в разных системах координат будут использоваться различные формулы преобразования, поскольку одному линейному преобразованию будут соответствовать различные матрицы.

Рассмотрим нулевое линейное преобразование О, переводящее все векторы в нуль: Ох=0, и единичное преобразование Е, Ех=х; этим преобразованиям соответствуют нулевая и единичная матрицы, причем в любой системе координат.

Для линейных преобразований на векторном пространстве определены операции сложения и умножения:

Сумма двух линейных преобразований А и В является линейное преобразование С, определенное как: Сх=Ах+Вх;

Произведение двух линейных преобразований А и В является линейное преобразование С, определенное как: С=АВ, если Сх=А(Вх)

Линейное преобразование В называется обратным к преобразованию А, если ВА=Е(или АВ=Е). При этом если преобразование А переводит вектор х в вектор у, то A^{-1}(обратное) переводит вектор у в х. Линейные преобразования, имеющие обратные, называются невырожденными. Для таких преобразований определитель матрицы будет не равен нулю.

Отметим особо некоторые важные классы линейных преобразований, например ортогональные линейные преобразования (обобщение поворота двумерных и трехмерных евклидовых пространств). Они не изменяют углов между векторами, поскольку не меняют длин векторов. Матрицы этих преобразований называют ортогональными.

Численные методы решения систем линейных уравнений основываются на левостороннем умножении исходной матрицы коэффициентов на вспомогательные матрицы, для того чтобы перейти к легкорешаемой системе. Вспомогательными матрицами для вещественных матриц чаще выбирают матрицы вращения или отображения.

Системы с неособенной матрицей обычно приводятся либо к треугольной матрице (матрица, у которой элементы выше или ниже диагонали равны нулю), либо ортогональной.

В теоретическом аспекте это означает представление матрице-коэффициэнтов в виде произведения двух треугольных матриц, или треугольной на ортогональную.

Для решения проблемы собственных значений до применения итерационных методов матрицы общего вида подобно преобразуют к матрицам Хессенберга или к трехдиагональным в случае симметрии, путем подобных преобразований элементарными матрицами, матрицами вращения или отражения.

ца, в каждой строке и столбце которой находится лишь один единичный элемент)

17. Разреженная (матрица, содержащая много нулей)
18. Симметричная (квадратная матрица, элементы которой симметричны относительно главной диагонали)
19. Теплицева (матрица, симметричная относительно второй диагонали, значения ее элементов зависят только от разности индексов i-j)
20. Треугольная (квадратная матрица, в которой все элементы ниже или выше главной диагонали равны нулю)
21. Верхнетреугольная (квадратная матрица, в которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю)
22. Нижнетреугольная (квадратная матрица, в которой все элементы выше главной диагонали равны нулю)
23. Унитреугольная (треугольная матрица, в которой все элементы на главной диагонали равны единице)
24. Хессенберга («почти» треугольные матрицы, верхняя матрица Хессенберга — квадратная матрица $H \in C^{n \times n}$, все элементы которой лежащие ниже первой поддиагонали равны нулю, нижняя — квадратная матрица, при транспонировании которой получается верхняя матрица Хессенберга, матрица являющаяся одновременно и верхней, и нижней матрицами Хессенберга является трехдиагональной — матрица Якоби)
25. Эрмитова (квадратная матрица, элементы которой являются комплексными числами, и которая, будучи транспортирована, равна комплексно сопряженной)
26. Унитарная (квадратная матрица с комплексными элементами, результат умножения которой на эрмитово сопряженную равен единичной матрице)
27. Унимодулярная (квадратная матрица с целыми коэффициентами, определитель которой равен +1 или -1).

9. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Определитель (детерминант) — это многочлен от элементов квадратной матрицы, каждый член которого состоит из произведения элементов матрицы, причем в каждое произведение входит только один элемент из каждого столбца и строки матрицы. Определитель матрицы А обозначается как: $det(A)$, $|A|$ или $\Delta(A)$.

Свойства определителей:

1. Определитель не изменяется, если строки и столбцы поменять местами
2. Определитель меняет знак, если поменять местами две строки или два столбца
3. Определитель равен нулю, если две строки или два столбца пропорциональны или равны
4. Если две или несколько строки или столбца матрицы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю
5. Если хотя бы одна строка или столбец матрицы нулевая, то определитель равен нулю
6. При добавлении к любой строке или столбцу линейной комбинации других строк или столбцов определитель не изменится
7. Сумма произведений всех элементов любой строки на их алгебраические дополнения равна определителю
8. Сумма произведений всех элементов любой строки или столбца на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельных строки или столбца равна нулю.
9. Определитель произведения квадратных матриц одинакового порядка равен произведению их определителей
10. Общий множитель элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя
11. Если одна строка или один столбец определителя равны сумме двух слагаемых, то определитель равен сумме определителей, причем в первом определителе будут первые слагаемые, а во втором — вторые. Остальные элементы будут одинаковы
12. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольное число.

10. ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнения вида

$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y=f(x)$ (1)

где $y=y(x)$ — искомая функция, $y^{(n)},\dots,y$ — ее производные, а $p_1(x),\dots,p_n(x)$ (коэффициенты) и $f(x)$ (свободный член) — заданные функции, называются линейными дифференциальными уравнениями. Уравнение (1) называется линейным, потому что искомая функция и все производные в первой степени. При $f(x) = 0$ уравнение (1) называется однородным и неоднородным в остальных случаях.

Общее решение $y_0=y_0(x)$ однородного линейного дифференциального уравнения при условии непрерывности $p_k(x)$ выражается формулой $y_0=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\dots+C_ny_n(x)$, где $C_1,\dots,C_n$ — произвольные постоянные, а $y_1,\dots,y_n$ — линейно независимые частные решения, образующие фундаментальную систему решений.

Линейная независимость определяется через определитель Вронского:

$$W_i(x) = \det\begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \cdots & f'_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Если он не равен нулю хотя бы в одной точке, то функции линейно независимы.

Общее решение $y=y(x)$ неоднородного линейного дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$Y = y_0 + Y$

где $y_0=y_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного, а $Y = Y(x)$ — частное решение данного неоднородного уравнения.

11. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Функция — понятие математики, выражающее зависимости одних величин от других. Если величины **x** и **y** связаны так, что каждому значению **x** соответствует определенное значение **y**, то говорят, что **y** — однозначная функция **от x**.

Также **x** могут называть независимой величиной, а **y** — зависимой. Записывают это **f(x)**, **F(x)** и др. Многозначной функцией называется функция, в которой одному значению **x** соответствует несколько (возможно, бесконечно много) значений **y**.

Задать функцию **f(x)** значит указать:

1. Множество значений **A**, которые может принимать **x** (область задания функции)
2. Множество значений **B**, которые может принимать **y** (область значения функции)
3. Правило, по которому **x** из **A** можно сопоставить одно или несколько значение у из **B**.

Областью задания функции может служить отрезок, интервал или же вся ось значений **Ox**.

Правило соотнесения значений обычно задается математической формулой, задающей, какие математические операции необходимо провести над **x**, чтобы получить **y**.

К аналитическим операциям также можно отнести операцию нахождения предела a_n — переход к пределу.

Анри Лебег (28.06.1875-26.07.1941), французский математик, в 1905 году предложил общее определение функции, изображаемой графически, как функции, значения которой получают из значений x и постоянных величин, используя арифметические действия и предельные переходы.

Также функции можно задать другими способами — например, функция **sin x** задается как проекция единичного вектора на ось, образующую с ним угол в **x** радиан.

Также существуют функции, называемые неизмеримыми функциями по Лебегу, это функции, не

12. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

Теория функций — раздел математики, изучающий общие свойства функций.

Она подразделяется на две части:

1. Теория функций действительного переменного
2. Теория функций комплексного переменного

Они различаются в теоретическом развитии анализа конкретных функций, представимых степенными рядами, и в детальности изучения основных понятий математического анализа.

Классический математический анализ подразумевает изучение непрерывных функций, обладающих высокой степенью гладкости и заданных на бесконечных или конечных интервалах. Но с середины XX вв. началось систематическое изучение функции общего типа, так как предел последовательности непрерывных функций может быть разрывен. Это же является причиной возможной разрывности производных непрерывных функций.

Дифференциальные уравнения, возникающие при решении физических задач, могут не менять решений в гладких функциях. Для нахождения решений необходимо рассматривать дифференциальные уравнения в более широких классах функций, именно эти решения дают ответ на исходные физические задачи. Все вышеперечисленное стало предпосылками появления и развития теории функций действительного переменного, частные факты которой были обнаружены, но они были восприняты как исключение и не были обобщены и классифицированы. Толчком к развитию теории функции стало использование в начале XX вв. теории множеств в качестве основы изучения функции. Направления теории функций действительного переменного;

1. Дескриптивная теория функций (основной объект изучения — операция предельного перехода).

Функция Y(x) находится по формуле

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{A} y_k(x) x \int_{x_0}^{x} W_k(t) e^{\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx} f(t)dt$$

где $y_k(x)$ — решения, составляющие фундаментальную систему решений однородного линейного дифференциального уравнения;

$W_k(x)$ — алгебраическое дополнение элемента $y_k^{(n-1)}(x)$ в определителе Вронского W(x).

Если коэффициенты уравнения (1) постоянны: $p_k(x)=a_k$ (k = 1,2,...,n), то общее решение однородного уравнения вычисляется формулой:

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{AR} \sum_{S=D}^{A_{n-1}} x^s e^{\alpha_k x} (C_{ks} \cos \beta_k x + D_{ks} \sin \omega\beta_k x)$$

где $a_k \pm ib_k$ (k = 1, 2, ... , m; $i = \sqrt{-1}$) — корни характеристического уравнения $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n = 0$,

где n_k — кратности этих корней; C_{ks}, D_{ks} — произвольные постоянные.

Системы линейных дифференциальных уравнений имеют вид:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{A} p_{ij}(x) y_k + f_i(x) \quad (2)$$

Общее решение однородной системы дифференциальных линейных уравнений, если все $f_j(x) = 0$, вычисляется по формуле:

$$y_i = \sum_{k=1}^{A} C_k y_{jk} \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

где $y_{j1}, ..., y_{jn}$ линейно независимые частные решения однородной системы.

Специальные виды определителей:

1. Определитель Грама

Определителем Грама системы векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ в евклидовом пространстве называется определитель матрицы Грама в следующей системе:

$$\begin{matrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & ... & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & ... & \langle e_2, e_n \rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & ... & \langle e_n, e_n \rangle \end{matrix}$$

где $\langle e_i, e_j \rangle$ — скалярное произведение векторов e_i и e_j

2. Определитель Вронского

Вронскиан системы функций $f_1(x), ... f_n(x)$, дифференцируемых на промежутке I (n-1) раз — функция на I, задаваемая определителем следующей матрицы:

$$W(f_1, ... f_n)(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & ... & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & ... & f_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & ... & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} x \in I$$

3. Определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & ... & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & ... & x_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & ... & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

4. Определитель Якоби

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x) & ... & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x) & ... & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial u_m}{\partial x_2}(x) & ... & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

2. Метрическая теория (свойства функции изучаются посредством измерения множеств, у которых есть эти свойства). Изучение дифференцирования и интегрирования функций, исследование строения разрывных функций, обобщение сходимости функциональных последовательностей. Основной класс функций, изучаемых в метрической теории — измеримые функции.
3. Конструктивная теория функций (подразумевает изучение вопросов изображения произвольных функций аналитическими средствами).

представимые в описанном ранее смысле никаким образом.

Элементарные функции

Элементарными функциями называются многочлены, степенные функции, рациональные функции, показательные и логарифмические функции, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Также элементарными функциями считаются функции, полученные путем простейших арифметических действий и суперпозиций из перечисленных выше функций.

Функции множества — это функции, сопоставляющие каждому множеству из класса множеств определенное число. Длина отрезка является функцией множества, определенной на классе всех отрезков.

13. ГРАФИКИ

График — это геометрическое изображение функциональной зависимости в виде линии на плоскости. Графики применяются для придания наглядности исследованию функциональных зависимостей, а также для быстрого и эффективного поиска значения функций по значениям ее аргументов. При выборе системы координат график функции f(x) является геометрическим местом или множеством точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям уравнения функции. Большинство графиков строится в декартовых прямоугольных системах координат.

Графики позволяют:

1. Решать задачи моделирования процессов управления.
2. Выполнять учет и контроль, классификацию и группировку операций.
3. Выявлять взаимосвязи факторов.
4. Определять нормативы и расчетные показатели.

Группы графиков:

1. Графики функциональных зависимостей между различными параметрами.
2. Графики состава объектов и взаимосвязей их частей (структурные схемы, табличные оргсхемы, схемы рабочих процессов и потоков информации).
3. Расчетные графики, упрощающие математические расчеты и расчеты нормативов.
4. Графики изменения процесса во времени и пространстве(плановые и учетно-контрольные, циклограммы, гормонограммы, планы объектов и местности).
5. Смешанные графики.

Виды графиков:

1. *Прямая линия* — график линейной функции $y = ax + b$. Функция y монотонно возрастает при a > 0 и убывает при a < 0. При b = 0 прямая линия проходит через начало координат т. 0 (y = ax — прямая пропорциональность).
2. *Парабола* — график функции квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$. Имеет вертикальную ось симметрии. Если a > 0, имеет минимум, если a < 0 — максимум. Точки пересечения (если они есть) с осью абсцисс — корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

14. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Элементарные функции — класс функций, состоящий из многочленов, рациональных функций, логарифмических функций, показательных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций, а так же функций составленных из перечисленных выше с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций примененных конечное число раз.

Класс элементарных функций встречается в современной математике наиболее часто, но большое число прикладных задач приводят к рассмотрению других классов, таких как цилиндрические.

Функции множества — функции, сопоставляющие каждому множеству из некоторого класса множеств определенное число. Длина отрезка — функция множества на множестве всех отрезков на прямой (функция отрезка).

Другим примером функции отрезка может служить интеграл (в случае, если задана интегрируемая функция). Отрезком тут является интервал интегрирования $[\alpha,\beta]$. Так же рассматриваются функции областей на плоскости или же в пространстве.

Например, при заданном распределении плотности, масса в области Ω будет являться функций данной области. Функцией области удобнее пользоваться в анализе физических явлений, чем функцией точки, поскольку функция области позволяет учесть случаи, когда плотность физических величин в отдельных точках бесконечна. К тому же данное понятие более точно отображает реальные условия проведения физического эксперимента, поскольку в наблюдениях наблюдается не функция точки, а среднее от этой функции по некоторой малой области.

Понятие функции множеств развивалось во время построения теории интеграла Лебега, по-

15. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Функциональные уравнения подразделяются на дифференциальные, интегральные и уравнения в конечных разностях.

Однако термин функциональные уравнения редко употребляется так широко. Под ним в узком смысле понимают те уравнения, искомые функции которых связаны с известными функциями одной или нескольких переменных при помощи операции образования сложной функции. Функциональные уравнения можно рассматривать как выражение свойства, характеризирующее класс функций (f(x)=f(-x) — класс четных функций, f(x+1)=f(x) — функции, имеющие период 1.)

В качестве примера простейшего функционального уравнения можно рассмотреть уравнение f(x+y)=f(x)+f(y). Непрерывные решения данного уравнения имеют вид: f(x)=Cx. Но если рассмотреть класс разрывных функций, существуют и другие решения. С этим уравнением связаны: f(x+y) = f(x)f(y), f(xy)=f(x)+f(y), f(xy)=f(x) f(y). Для этих уравнений непрерывные решения примут вид

$$e^{Cx}, C, nx, x_0 1(x > 1).$$

Эти уравнения служат для определения показательной, логарифмической и степенной функций.

Функциональные уравнения используются для введения новых классов функций. Рассмотрим двоякопериодические функции: f(z+a) = f(z) и f(z+b)=f(z). Или автоморфные функции: $F(s_a z) = f(z)$, где $\{S_a\}$ — некоторая группа дробно-линейных преобразований.

С помощью функциональных уравнений можно расширить область определения функции в случае, если функция известна в некоторой области. f(x+1)=f(x) позволяет определить значение периодический функции в любой точке по значениям на отрезке [0,1].

16. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Функциональный анализ — часть современной математики, главной задачей которой является изучение бесконечномерных пространств и их отображений. Наиболее изученными понятиями в функциональном анализе являются линейные пространства и линейные отображения.

На данном этапе развития функциональный анализ плотно связан с теоретической физикой, классическим анализом и алгеброй. В частности, с теорией дифференциальных уравнений, частными производными и т.д.

Чаще всего в функциональном анализе используются линейные топологические пространства — линейные пространства X над полем комплексных(или действительных чисел) чисел C, которые вместе с тем являются топологическими, причем в данной топологии линейные операции непрерывны. Также важна ситуация, когда в линейном пространстве X возможно ввести норму векторов, свойства которые являются обобщением свойств длин векторов в евклидовом пространстве.

Норма элемента x — действительное число $\|x\|$ такое, что $\|x\| \neq 0$ всегда, и $\|x\| = 0$ в случае, когда

$$x = 0; \|\lambda\| = |\lambda| \in \|x\|, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Линейное пространство, в котором возможно ввести норму векторов, называют нормированным, топология в нем вводится при помощи метрики $dist(x,y) = \|x - y\|$, таким образом, считается, что последовательность $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, если $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Зачастую возникает ситуация, когда в линейном пространстве X можно ввести скалярное произведение — обобщение скалярного произведения в евклидовом пространстве. Оно описывается как комплексное число (x,y) такое, что всегда (x,x)>0, и (x,x)=0 тогда и только тогда, когда x=0.

скольку приходилось рассматривать не только функции от областей, но и от произвольных измеримых множеств. Например, была описана такая функция, как мера Лебега $\mu(E)$ от множества E. Эта функция является аддитивной — мера суммы любой конечной или счетной совокупности непересекающихся измеримых множеств есть сумма мер этих множеств.

Кроме лебеговской мер множеств рассматриваются также другие меры, являющиеся неотрицательными, аддитивными функциями множеств, определенных на соответствующем классе множеств. Функция множеств f(E) является абсолютно непрерывной относительно меры μ, если f(E)=0 при $\mu(E) = 0$.

Интеграл Лебега заданной суммируемой функции $\varphi(x)$ по множеству M является аддитивной, абсолютно непрерывной, относительно меры Лебега, функцией от M. Всякая вполне аддитивная, абсолютно непрерывная функция множества может быть представлена в качестве интеграла Лебега от некоторой суммируемой функции $\varphi(x)$. Например — распределение вероятностей.

3. *Гипербола* — график функции
   $y = \frac{a}{x}$.

   При a > O расположена в I и III четвертях, при a < 0 — во II и IV. Асимптоты — оси координат. Ось симметрии — прямая y = x(a > 0) или y = — x(a < 0).
4. *Экспонента* (показательная функция по основанию e) $y = e^x$. (Другое написание $y = exp(x)$). Асимптота — ось абсцисс.
5. $y = sinx$. *Синусоида* — периодическая функция с периодом T = 2π
6. *Косинусоида* $y = cosx$ (графики y = sinx и y = cosx сдвинуты по оси x на $\frac{\pi}{2}$)
7. *Тангенсоида* $y = tgx$. Точки разрыва при x = $\frac{\pi}{2}$ (2k -1), где k = 0, ±1, ±2,.. Вертикальные асимптоты в этих точках.
8. *Гауссиана* $y = Ae^{-ax^2}$. Кривая «нормального» закона распределения ошибок,

   $$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \quad a = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}},$$

   у которого y ^{2} – дисперсия ошибки. Симметрия относительно оси y.
9. $y = secx$ — кривая «цепной линии», эту форму принимает абсолютно гибкая нить, подвешенная в параллельном поле тяжести. А полная функция периодична, и ее асимптоты x = $\frac{\pi}{2}$(2k -1), как у функции $y = tgx$.
10. *Круг* с центром в точке (x_o, y_o) радиуса r. $(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 = r^2$
11. *Эллипсс* центром в точке (x_o, y_o). Большая полуось a, малая b, эксцентриситет

    $$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad \frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$
12. *Затухающее колебание* $y = Ae^{-at} \cdot sin(\omega x+\varphi)$

$$(x, y) = (\overline{x, y}); (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, y) + \mu(x, y)$$

Выражение $\sqrt{(x, x)} = \|x\|$ будет являться нормой элемента x. Такое пространство будет называться предгильбертовым. Рассматриваемые пространства должны быть полными (существует предел $x_0 = x$, также являющийся элементом X). Полное линейное и полное предгильбертово пространства будут называется соответственно банаховым и гильбертовым. Так же в случае линейного нормированного (предгилбертова) пространства процедура пополнения метрического пространства приводит к банахову (гилбертову) пространству.

В функциональном анализе большое внимание уделяется изучению свойств конкретных пространств, поскольку их свойства определяют характер решения задачи, получаемого методами функционального анализа.

В качестве решений функциональных уравнений используются как конкретные функции, так и классы функций, зависящие от произвольных параметров или производных функций. Для части функциональных уравнений общее решение можно найти, если известны одно или несколько его частных решений. Например: общее решение f(x)=f(ax) имеет вид: $\varphi[\omega(x)]$, где $\varphi(x)$ — производная функция, а $\omega(x)$ — частное решение этого уравнения.

Также для решения используется сведение таких уравнений к дифференциальным уравнениям. Этот метод даст решения, принадлежащие к классу дифференцируемых функций.

Другим используемым методом решения является метод итераций. Например, решение уравнения Абеля:

$$f\alpha[(x)] = f(x) + 1,$$

где $\alpha(x)$ – заданная функция, и связанного с ним уравнения Шредера:

$$f[\alpha(x)] = c(x).$$

Существует доказательство, выполненное А. И. Коркиным, что если $\alpha(x)$ — аналитическая функция, то уравнение Абеля имеет аналитическое решение. Эти доказательства было использовано в теории групп Ли, и в дальнейшем привели к созданию теории итераций аналитической функции.

17. ИСТОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В истории создания дифференциальной геометрии особо отмечены имена Л. Эйлера и Г. Монжа.

В конце XVIII века ими были получены важные факты теории поверхностей. В начале XIX в. К. Гаусс ввел в эту науку обе квадратичные формы. Также он доказал теорему о инвариантности полной кривизны относительно изометрических преобразований. По сути, он заложил основы внутренней геометрии поверхностей. В середине и во второй половине XIX века в работе над теорией поверхности отметились Ф. Миндингом, Ж. Лиувиль, Э. Бельтами, Ж. Г. Дарбу, Л. Бианки. Работой над дифференциальной геометрией занимались также русские ученые, такие как Д. Ф. Егоров, Н. Н. Лузин, С. П. Фиников и многие другие.

Временем создания дифференциального исчисления как раздела математики принято считать то время, когда было понято, что определенный набор специальных задач (в том числе и первую очередь задача определения мгновенной скорости) решаются при помощи одного математического аппарата, с использованием производных и дифференциалов. Это открытие связано с именами И. Ньютона и Г. Лейбница. В 1666 г. Ньютон разработал метод флюксий. Он выделял два понятия — флюксия и флюента, соответственно производная и неопределенный интеграл как первообразная. Также он попытался обосновывать свой метод флюксий через свою теорию пределов, не смотря на то, что последняя была им лишь намечена.

Г. Лейбниц в 70-е годы XVII века создал свой алгоритм дифференциального исчисления. Он использовал такие понятия:

- дифференциал — бесконечно малое приращение переменного,

18. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Дифференциал (от латинского differentia — разность, различие) в математике — главная линейная часть приращения функции. Впервые термин был введен немецким математиком Готфридом Вильгельмом фон Лейбницем (21.07.1646-14.11.1716) и изначально применялся для обозначения «бесконечно малой величины» (меньше всякой конечной величины, но не равна нулю). Подобное использование осталось только в нестандартном анализе (раздел математической логики, посвященный приложению теории нестандартных моделей к исследованиям в традиционных областях математики), в остальных же разделах математики упразднено, как неудобное.

Возьмем функцию $y = f(x)$ одного переменного x. Если в точке $x=x_0$ эта функция имеет производную, то приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ функции $f(x)$ можно представить в виде:

$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + R$, (1)

где R бесконечно мал относительно Δx.

$f'(x_0)\Delta x$ в (1) и называется дифференциалом $f(x)$ в точке x_0 и равен dy. Отсюда видно, что dy линейно зависит от Δx, а равенство (1) показывает связь между dy и Δy.

Начало формированию обобщенного понятия дифференциала на вектор-функции положили в начале XX в. французские математики Рене Гато и Морис Рене Фреше. Оно позволяет выяснить смысл понятия «дифференциал» для функций нескольких переменных, приводит к понятию вариации, лежащему в основе вариационного исчисления.

Рассмотрим функцию $L(x)$ векторного аргумента x, такую, что она непрерывна и удовлетворяет равенству $L(x' + x'') = L(x') + L(x'')$ для любых x из области определения. Такая функция называется линейной.

19. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Дифференциальная геометрия — раздел геометрии, в котором методами математического анализа изучаются геометрические образы. Главными объектами изучения являются достаточно гладкие кривые и поверхности евклидова пространства, а также их семейства. Обычно изучаются не объекты целиком, а сколь угодно малые их части, но также могут изучаться свойства геометрических объектов в целом. На функции, задающие исследуемые объекты, накладываются определенные требования гладкости — функции должны быть непрерывно дифференцируемы. Дифференциальная геометрия изучает одномерные объекты (кривые), двумерные (поверхности), трехмерные (обычное евклидово пространство), а также четырехмерные (прямые евклидова пространства).

Изучение дифференциально-геометрических многообразий ведется по следующим направлениям:

1. Геометрия транзитивной группы отображений многообразий на себя (классическая дифференциальная геометрия; аффинная геометрия — раздел геометрии, изучающий свойства фигур, инвариантные относительно афинных преобразований, в том числе параллельность прямых и отношения направленных отрезков. Афинные преобразования подразделяются на эквиафинную, центроафинную геометрии и другие. *Проективная* геометрия — раздел геометрии, который изучает проективные пространства и плоскости, его главная особенность — принцип двойственности, привносящий симметрию во многие конструкции; *конформная* геометрия — раздел геометрии, изучающий свойства фигур, которые не изменяются при конформных преобразованиях, ее основным инвариантом является угол между направлениями).
2. Геометрия многообразий римановых пространств. Играет важную роль в теории от-

20. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Дифференцированием называется процесс нахождения производной.

Формулы производной:

$$C' = 0;$$

$$(x^n)' = nx^{n-1};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

$$e^x = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{(\cos x)^2};$$

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}};$$

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = 1/(1 + x^2);$$

Правила дифференцирования:

$$(Cf(x))' = Cf'(x), \text{где } C \text{ – константа;}$$

$$\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x);$$

Если производная $f'(x)$ в свою очередь имеет производную, то ее называют второй производной

Линейная функция n-мерного аргумента $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ всегда имеет вид $L(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, где a_i – константы. Приращение $\Delta L = L(x+h) - L(x)$ линейной функции $f(x)$ имеет вид: $\Delta L = L(h)$, то есть не зависит от аргумента x и линейно зависит от h.

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой при значении x, если $\Delta f = f(x+h) - f(x)$, рассматриваемое как функция от h, имеет главную линейную часть $L(h)$, то есть выражается формулой:

$\Delta f = L(h) + R(h)$,

где остаток $R(h)$ бесконечно мал по сравнению с h, при $h \to 0$. Так как $R(h)$ бесконечно мал, его можно отбросить, и мы получаем, что главная линейная часть $L(h)$ приращения Δf функции $f(x)$ в точке x и называется дифференциалом df.

В случае $f(x) = x$ исходя из общего определения получается, что $df = h$. То есть приращение h можно считать дифференциалом от аргумента x и обозначить как dx.

- определенный интеграл – сумма бесконечно большого числа дифференциалов.

Лейбниц первым описал дифференциал как dx и интеграл как ydx. Также он создал ряд правил дифференцирования и первым употребил термин «дифференциальное исчисление». Продолжателями дела Лейбница можно считать Я. Бернулли и И. Бернулли, Б. Тейлора и других.

Новый этап развития дифференциального исчисления связывают с работами Л. Эйлера и Ж. Лагранжа. Эйлер первым оторвал дифференциальное исчисление от геометрии и механики, сделав тем самым его полноценной аналитической дисциплиной. Лагранж подошел к дифференциальному исчислению алгебраически, пользовался разложением функций в степенные ряды. Ему принадлежит термин «производная». В начале XIX в. дифференциальное исчисление было обосновано через теорию пределов. Работой над этой проблемой занимались такие ученые, как О. Коши, Б. Больцано и К. Гаусс. Впоследствии развитие теории дифференциального исчисления было связано с развитием теории множеств и теории функций действительного переменного.

и обозначают

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2}$$

Производная порядка n обозначается соответственно

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Функция $y = f(x)$, область определения которой содержит в себе некоторую окрестность точки x_0, называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ можно записать в форме:

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, *где* $A = A(x_0)$, $o = o(x, x_0) \to 0$, *при* $x \to x_0$

В этом и только в этом случае выражение $A\Delta x$ называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается dy или $d(f(x_0))$.

Для функции $f(x) = x$ имеем $dx = \Delta x$, то есть дифференциал независимого переменного совпадает с его приращением, исходя из этого обычно пишут, что $dy = Adx$.

Для того чтобы функция одного переменного $y = f(x)$ имела в точке x_0 дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную $f'(x_0)$, и было верно равенство $dy = f'(x_0)dx$.

носительности. (Риманова геометрия – раздел геометрии, изучающий гладкие (римановы) преобразования с дополнительной структурой римановой метрикой, т.е. с выбором евклидовой метрики, меняющейся от точки к точке, на каждом касательном пространстве.)

Геометрия финслеровых пространств (обобщение римановых пространств) – одно из обобщений римановой геометрии, рассматривающее многообразия с финслеровой метрикой (выбором гладкой нормы на каждом касательном пространстве, гладко меняющейся от точки к точке).

Геометрия многообразий со связанностью, то есть многообразий, в которых указан способ, с помощью которого можно сравнивать образы.

21. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения — уравнения, содержащие искомые функции, их производные различных порядков и свободные переменные. Порядком дифференциального уравнения считается наивысший порядок входящих в него производных.

Теория дифференциальных уравнений сформировались в отдельную дисциплину в XVIII веке, одновременно с интегральным и дифференциальным исчислением. Наибольший вклад в дифференциальные уравнения сделали своими трудами Д. Бернулли, Ж. Д. Аламбер и Л.Эйлер.

Термин «дифференциальное уравнение» принадлежит Лейбницу.

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с одной неизвестной функцией называют соотношение:

$f(x,y',y)=0$

между независимой переменной x, искомой функцией y и ее производной

$$y'=\frac{dy}{dx}\ (1)$$

если уравнение (1) может быть решено относительно производной, то получается уравнение:

$y'=f(x,y)$ (2)

Уравнение (2) можно записать иначе — в виде соотношения между дифференциалами:

$f(x,y)dx-dy=0,$

тогда оно становится частным случаем уравнений вида:

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$ (3)

Геометрическая интерпретация дифференциальных уравнений состоит в следующем: пусть $y=y(x)$ есть решение уравнения (2). Тогда геометрически это значит, что в прямоугольных координатах касательная к кривой $y=y(x)$ имеет

22. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с одной неизвестной функцией описывается как:

$f(x,y',y)=0$

Где: x — независимая переменная, y — искомая функция, а y — производная определяется через:

$$y'=\frac{dy}{dx}\ (А)$$

В случае, когда данное уравнение может быть разрешено относительно производной, мы имеем:

y' = f(x,y) (Б)

Если мы будем предполагать функцию f(x,y) однозначной, рассмотрение дифференциальных уравнений окажется проще.

Уравнение (Б) можно представить в виде соотношения между дифференциалами: f(x,y)dx-dy=0. Тогда оно станет частным случаем уравнения вида:

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$(В)

В уравнениях вида (В) переменные x и y будем считать равноправными, т.е. не интересоваться тем, какая из них является независимой.

Также стоит рассмотреть геометрическую интерпретацию дифференциальных уравнений:

Пусть y=y(x) — это решение уравнения (Б). Тогда геометрически в прямоугольных координатах касательная к кривой y=y(x) имеет в каждой лежащей на ней точке M(x,y) угловой коэффициент k=f(x,y), и соответственно нахождение решений y=y(x) будет представятся такой задачей: в каждой точке некоторой области на плоскости задано направление, требуется найти все кривые, которые в точки M имеют направление, заранее сопоставленное с этой точкой. В случае, когда функция непрерывна, направление меняется при перемещении точки M непрерывно, и есть возможность изобразить поле направлений наглядно.

23. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом — уравнения, связывающие аргумент, искомую функцию и ее производные, взятые при различных значениях данного аргумента. Данный класс уравнений появился в конце XVI века.

Примеры:

$x''(t)=ax(t-\tau)$, (1)

$x''(t)=ax(t-kt)$. (2)

где: a — постоянные,

$\tau=t-(t-\tau)$ и $t-kt$ — **отклонения аргумента.**

Такие уравнения часто рассматривались в связи с решением геометрических задач и позднее в применении, например, к теории регулирования. Систематическая теория дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом начала выстраивается в 50-х гг. XX в. и уже с 60-х является обособленным и важным отделом математического анализа.

Лучше всего исследованы линейные однородные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, например (1). Для таких уравнений существует достаточно полная система решений $x=e^{pt}$, причем для отыскания p получается трансцендентное характеристическое уравнение: P(p)=0, где P(p) — сумма членов $Ap^m e^{ap}, m\geq 0$ — целое, например, для (1) имеем $p(p)=p-ae^{\tau p}$. Это уравнение имеет бесконечное число комплексных решений. Прочие решения разлагаются в ряды по указанным простейшим решениям, соответственно об основных свойствах совокупности решений можно судить по расположению нулей функции P(p).

Среди дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом выделяется наиболее изученный класс дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в которых старшая производная от искомой функции при каком-

24. ЗАДАЧА КОШИ

Огюстен Луи Коши (21.08.1789-23.05.1857) – французский математик, член Парижской академии наук, автор фундамента математического анализа.

Основной теоремой дифференциальных уравнений является теорема Коши о существовании и единственности задачи Коши.

Задача Коши в основном возникает при необходимости анализа процессов, определяемых дифференциальным законом эволюции и начальным состоянием (математическим выражением которых и являются уравнение и начальное условие). Этим мотивируется терминология и выбор обозначений: начальные данные задаются при $t=0$, а решение отыскивается при $t>0$.

Задачей Коши называется задача нахождения такого решения дифференциального уравнения первого порядка

$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$,

что выполняется условие Коши: $y(x_0)=y_0$, где y_0 и x_0 — заданные данные. Они так же называются начальными данными или данными Коши. Начальное условие записывается в виде $y|_{x=x_0}=y_0$. Графическая интерпретация задачи Коши: найти интегральную кривую дифференциального уравнения

$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$'

проходящую через заданную точку (x_0,y_0).

Формулировка теоремы для случая дифференциального уравнения первого порядка звучит так: пусть функция $f(x,y)$ и частная производная

$$\frac{df(x,y)}{dy}$$

непрерывны в некоторой области D плоскости (x,y), точка (x_0,y_0) лежит в области D. Тогда существует решение задачи Коши; если $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ — два решения задачи Коши, то $\varphi_1(x)$ и

График любой функции y=y(x) пересекает каждую параллельную оси Oy прямую только один раз. При переходе к уравнениям вида (B) мы открываем для себя новые возможности вида интегральных кривых, При помощи пары непрерывных функций P(x, y) и Q(x,y) мы можем задать любое непрерывное «поле направлений». Задачи интегрирования уравнений (B) и разыскания интегральных кривых по заданному на плоскости полю направлений совпадают.

Наиболее полно из специальных типов дифференциальных уравнений разработана теория линейных дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений.

В случае линейных дифференциальных уравнений вопросы качественного поведения интегральных кривых имеют сравнительно простые решения, в свою очередь для нелинейных дифференциальных уравнений вопросы качественной теории дифференциальных уравнений приобретает наиважнейшее значение.

в каждой лежащей на ней точке $M(x,y)$ угловой коэффициент $k = f(x,y)$.

Следовательно, нахождение решений $y = y(x)$ геометрически сводится к задаче: в каждой точке некоторой области на плоскости задано направление, требуется найти все кривые, которые в любой своей точке M имеют направление, заранее сопоставленное с этой точкой. Если функция $f(x,y)$ непрерывна, то это направление меняется при перемещении точки M непрерывно.

График любой однозначной функции $y = y(x)$ пересекает каждую прямую, параллельную оси Oy ровно один раз. При помощи пары непрерывных функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ можно задать любое непрерывное поле направлений, что открывает новые возможности для вида интегральных кривых. Задача интегрирования уравнений вида (3) совпадает с чисто геометрической задачей разыскания интегральных кривых по заданному на плоскости полю направлений.

$\varphi_2(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 совпадают (единственность решения задачи Коши).

Геометрический смысл теоремы:

Через каждую точку (x_0,y_0) области D проходит интегральная кривая, и притом только одна.

При этом дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано как P(x,y) dx+Q(x,y)dy=0.

Отличием задачи Коши от краевых задач является то, что область, где определяется искомое решение, заранее не указывается. Несмотря на это задача Коши зачастую рассматривается как одна из краевых.

Основные вопросы, связанные с задачей Коши:

- Существует ли решение задачи Коши?
- Если решение существует, то какова область его существования?
- Если решение существует, единственно ли оно?
- Если решение существует и единственно, то будет ли оно корректным относительно начальных данных?
- Корректность решения задачи Коши определяется через непрерывность.

либо значении аргумента определяется через саму эту функцию и ее младшие производные, взятые при меньших или равных значениях аргумента.

Примеры: Уравнение (1) при

≥ 0 (τ – запаздывание);

уравнение (2) при

k ≤ 1 и t ≥ 0 .

Такие уравнение и их системы с аргументом — временем описывают процессы с последействием, скорость которых определяется не только через текущее состояние, но и состоянием в предшествующие моменты, в отличии от обычных дифференциальных уравнений. В качестве примера можно рассмотреть системы автоматического управления при наличии запаздывания в органе управления. Уравнения с запаздывающим аргументом, несмотря на свою схожесть с обыкновенными дифференциальными уравнениями, имеют ряд важных отличий.

25. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ. МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Пусть имеется функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;b]$. Если эту функцию сложно вычислить или она не имеет аналитической формы задания и ее свойства также сложно определить, применяется метод наименьших квадратов. Этот метод заключается в следующем: данная функция $f(x)$ заменяется одной функцией из m-параметрического семейства функций $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_m)$, заданных на том же отрезке $[a;b]$, наиболее точно приближенной к исходной функции $f(x)$. Точность приближения оценивается формулой:

$$R(C_1, C_2, ..., C_m) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_i, C_1, C_2, ..., C_m))^2,$$

где точки x_i принадлежат отрезку $[a;b]$. Те значения $(C_1, C_2, ..., C_m)$, при которых функция $R(C_1, C_2, ..., C_m)$ достигает своего минимума, и будут являться искомыми значениями максимального приближения функции $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_m)$ к функции $f(x)$. Необходимым условием минимума функции $R(C_1, C_2, ..., C_m)$ является равенство нулю всех ее частных производных.

Наиболее удобным является случай, когда функции φ зависят от параметров линейно, потому обычно функция $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_m)$ имеет вид:

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \dots + C_m\varphi_m(x).$$

Метод интерполяции.

Метод интерполяции состоит в следующем: пусть имеются функция $f(x)$ и параметрическое семейство функций $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_m)$, определенное на отрезке $[a;b]$. Множество точек данного отрезка $(x_0 = a; x_1, x_2, ..., x_m = b)$ называются узлами интерполяции. Для узлов интерполяции должно быть справедливо правило $x_i < x_{i+1}$. За-

26. ИСТОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Интегральное исчисление — раздел математического анализа, изучающий интегралы функций и их геометрические приложения.

Задачи интегрального исчисления связаны с нахождением площадей и объемов. Ряд таких задач без применения интегрального исчисления был решен математиками древней Греции. Большую роль при решении таких задач играл метод исчерпывания, созданный Евдоксом Книдским и применявшийся Архимедом.

Тем не менее, Архимедом не было выделено общее содержание интеграционных приемов и понятие об интеграле, без чего невозможно было создание алгоритма интегрального исчисления. Позднее ученые среднего и ближнего востока в IX-XV веках переводили труды на арабский язык, но не сделали существенного вклада в интегральное исчисление. Только в XVI и XVII веках развитие естественных наук поставило перед учеными ряд новых задач, таких как нахождение квадратур, кубатур и определение центров тяжести. Идеи античного метода неделимых были развиты Б. Кавальери, Э. Торричелли, Дж. Валлисом, Б. Паскалем.

Методом неделимых были решены некоторые геометрические и механические задачи. В это же время были опубликованы работы П. Ферма по квадрированию парабол n-й степени, а чуть позже — работы Х. Гюйгенса по спрямлению кривых. Так же была установлена связь между задачами на проведение касательной и квадратуры, то есть между дифференцированием и интегрированием. И. Ньютон и Г. Лейбниц независимо создали основные понятия и методы интегрального исчисления, второму также принадлежит термин «интегральное исчисление» и обозначение интеграла $\int y dx$. Ньютон занимался изучением неопределенных интегралов (флюенов), Лейбница больше

27. ПОНЯТИЕ ИНТЕГРАЛА И ЕГО ВИДЫ

Интеграл (от латинского *integer* — целый) — это одно из важнейших понятий математики, которое возникло в связи с потребностью нахождения функции по ее производной, а с другой стороны, измерения площади, объема, длины дуг и другого.

В соответствии с этими задачами различают неопределенный и определенный интегралы, их вычисление — задача интегрального исчисления.

Неопределенный интеграл

Первообразная функции $f(x)$ одного действительного переменного — функция $F(x)$, производная которой при каждом значении x равна $f(x)$. Так как производная константы равна нулю, то имея общую формулу первообразной $F(x)$, получают общее выражение всех первообразных этой функции $F(x) + C$. Это общее выражение первообразных называют неопределенным интегралом $\int f(x)dx$ функции $f(x)$. Одна из основных теорем интегрального исчисления гласит, что каждая непрерывная функция действительного переменного имеет неопределенный интеграл.

Определенный интеграл

Определенный интеграл функции $f(x)$ с нижним пределом a и верхним пределом b можно определить как разность первообразных:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Определение не зависит от того, какая из первообразных была выбрана для вычисления определенного интеграла.

Если функция $f(x)$ непрерывна и $a < b$, то это определение равносильно определению данному Коши: рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[c,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$; в каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$ берут произвольную

28. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Определенный интеграл — аддитивный монотонный нормированный функционал, заданный на множестве пар, первой компонентой которых является интегрируемая функция или функционал, а второй — область в множестве задания этой функции или функционала.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \text{где } C - \textbf{константа;}$$

Очевидно, что численное значение интеграла не зависит от выбора обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt;$$

К необходимости вычисления определенных интегралов сводятся задачи:

1. нахождения квадратур (измерения площадей, ограниченных кривыми),
2. спрямления кривых (измерение длин дуг кривых),
3. нахождения кубатур (измерение объемов тел),
4. измерение площадей поверхностей объектов,
5. определения координат центров тяжести и моментов инерции
6. измерение работы, производимой силой
7. измерение пути тела при известной скорости его движения
8. и т. д.

На практике вычисление определенных интегралов происходит несколькими способами:

интересовали определенные интегралы. Дальнейшим развитием интегрального исчисления в XIX-XX веках занимались И. Бернулли, Л.Эйлер, О. Коши, М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев, Б. Риман, А. Лебег и другие.

Труды этих ученых привели у тому, что в конце XIX – XX вв. развитие науки позволило углубить и обобщить основные понятия интегрального исчисления. Активные роли в этом процессе играли Б. Риман, А. Лебег и др.

дача интерполяции заключается в определении параметров C_i, таких что $f(x_i) = \varphi(x_i, C_0^0, C_1^0, \ldots, C_m^0)$.

Интерполяционная формула Лагранжа

Интерполяционная формула Лагранжа ставит в соответствие функции $f(x)$ многочлен вида:

$$L_m(x) = \sum_{j=0}^{m} f(x_i) \prod_{j \neq 1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Таким образом, интерполяция происходит в классе многочленов вида:

$C_0 x^m + C_1 x^{m-1} + \ldots + C_m$.

В случае, если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную m+1 порядка, остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа имеет вид:

$$f(x) - L_m(x) = \frac{f^{m+1}(\varepsilon)}{(m+1)!} \omega_m(x),$$

где

$$\omega_m(x) = \prod_{i=0}^{m} (x - x_i), \varepsilon \in [min(x_0, x), max(x_m, x)].$$

Величина остаточного члена зависит от значения производной функции, функции $\omega_m(x)$ и от выбора узлов интерполяции.

1. вычисляя предел соответствующей интегральной суммы
2. с помощью предварительного нахождения неопределенных интегралов
3. приближенное вычисление определенных интегралов при помощи квадратурных формул
4. графические методы, если нет необходимости в большой точности

Понятие определенного интеграла также распространяется на случаи неограниченного промежутка интегрирования и некоторые классы неограниченных функций, эти обобщения – несобственные интегралы.

Интеграл, зависящий от параметра (основное средство изучения большинства специальных функций):

$\int_a^b f(x, a)dx$

где f(x,a) функция, непрерывная по x.

точку ε_i ($x_{i-1} \le \varepsilon_i \le x_i$) и образуют сумму:

$$S_n = f(\varepsilon_1)(x_1 - x_0) + f(\varepsilon_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\varepsilon_n)(x_n - x_{n-1})$$

Сумма S_n зависит от выбора точек x_i и ε_i, однако в случае непрерывной функции $f(x)$ суммы S_n, получающиеся при различном выборе точек x_i и ε_i, стремятся к определенному пределу, если максимальная из разностей $x_i - x_{i-1}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Этот предел и считается определенным интегралом.

По определению:

$$\int_a^a f(x)dx = 0; \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

По области интегрирования интегралы различаются на:

Поверхностный (интеграл от функции, заданной на какой-либо поверхности)

1. *Кратный* (множество интегралов, взятых от d>1 переменных).
2. *Определенный* интеграл (результатом его вычисления всегда является число).
3. *Криволинейный* (интеграл, взятый вдоль кривой на плоскости или в пространстве, бывает 1го и 2го типов).

29. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Интегрирование (нахождение неопределенных интегралов) — это операция, обратная операции дифференцирования. Если при дифференцировании ищется производная от функции, то при интегрировании — первообразная.

Первообразная (примитивная) функция заданной функции f является F, производная которой на всей области определения равна f (F'=f). Ее вычисление заключается в нахождении неопределенного интеграла.

Это значит, что производная от первообразной исходной функции равна исходной функции. Поскольку производная константы равна нулю, то все первообразные для функции $f(x)$ содержатся в выражении $F(x) + C$, которое называется неопределенным интегралом и записывается так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Если взять интеграл с переменным верхним пределом, это позволит установить основную формулу интегрального исчисления (Ньютона-Лейбница):

$$\int_a^x f(u)du = F(x) - F(a).$$

Трудность нахождения первообразной в отличии от производной состоит в том, что первообразная элементарной функции не всегда является элементарной функцией. Интегральное исчисление располагает определенными приемами, область применения каждого из которых ограничена.

К классу функций, интегралы от которых всегда выражаются элементарными функциями, принадлежит множество всех рациональных функций:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

30. ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА, ЛЕБЕГА, СТИЛТЬЕСА

Коши применял свое определение интеграла только к непрерывным функциям.

Георг Фридрих Бернхард Риман (17.09.1826-20.07.1866), немецкий математик, расширил понятие интегрируемости, предложим считать интегралом предел сумм S_n при $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$.

Для интегрируемости в смысле Римана функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ необходимо и достаточно выполнение двух условий: $f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и множество точек разрыва функции $f(x)$, размещающихся на $[a,b]$, имеет меру, равную нулю. Таким образом, непрерывность в каждой точке не обязательна для интегрируемости по Риману.

Анри Леон Лебег (28.06.1875-26.07.1941) — французский математик, профессор Парижского университета и член Парижской Академии Наук. Он наиболее известен своей теорией интегрирования, которая обобщила определение интеграла на более широкий класс функций, которое широко применяется в теории вероятностей.

Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Лебегу на отрезке $[a,b]$, если ряды, определяющие суммы S, абсолютно сходятся при $\max(y_i - y_{i-1}) \to 0$. Предел этих сумм и называется интегралом Лебега.

Функция, считающаяся интегрируемой по Лебегу, не обязательно является интегрируемой по Риману и наоборот.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и определена на отрезке $[a,b]$ и $U(x)$ — определенная на том же отрезке ограниченная монотонная (не убывающая или не возрастающая) функция. Если функция $U(x)$ имеет ограниченную и интегрируемую по Риману производную, то интеграл Стилтьеса имеет вид:

31. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ГАММА-ФУНКЦИЯ

К несобственным интегралам относятся интегралы, у которых хотя бы один из пределов интегрирования бесконечен, либо подынтегральная функция не ограничена (либо оба условия одновременно). На несобственные интегралы распространяются многие свойства и методы собственных интегралов (пределы интегрирования конечны и подынтегральная функция ограничена), применяются методы интегрирования по частям и подстановки.

Теорема сравнения (признак сходимости несобственного интеграла).

Если на промежутке $[a,+\infty)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и удовлетворяют неравенству $0 \le g(x) \le f(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (1) следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ (2). При тех же условиях из расходимости (2) следует расходимость (1). Если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся.

Интегралы с бесконечным нижним пределом $-\infty$ определяются аналогично и имеют аналогичные свойства.

Интеграл с двумя бесконечными пределами (верхним и нижним) определяется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

Причем интеграл с двумя бесконечными пределами сходится, если сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства, и расходится, если хотя бы один из них расходится.

Пусть имеем непрерывную функцию $f(x)$ при $a \le x < b$, которая при $x \to b$ стремится к бесконечности, то есть $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда интеграл от неограниченной функции определяется следующим образом:

32. ИНТЕГРАЛ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Интегральной формой Фурье функции $f(x)$ называется выражение:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t - x)dt.$$

Также это выражение называется разложением функции в интеграл Фурье.

Правая часть выражения называется интегралом Фурье и может быть записано в виде:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt,\ b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt.$$

Также есть разложение функции в комплексный интеграл Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda(t-x)}d\lambda$$

Преобразованием Фурье называется функция:

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-it\lambda}dt$$

Обратное преобразование (обращение) выполняется по формуле

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)\, e^{-it\lambda}dt$$

В преобразовании и обратном преобразовании Фурье функция $f(x)$ называется прообразом, а $\tilde{f}(\lambda)$ — образом.

Функция

$$A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-it\lambda}dt$$

называется спектральной функцией для $f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dU(x) = \int_a^b f(x)dU'(x)dx$$

Томас Иоаннес Стилтьес (29.12.1856-31.12.1894) — нидерландский математик, предложивший в 1894 году обобщенное определение интеграла.

Пусть f(x) — непрерывная функция действительного переменного x, определенная на отрезке |a,b|, U(x) — ограниченная монотонная функция, определенная на том же отрезке.

Интеграл Стилтьеса существует и в том случае, если функция $U(x)$, не будучи монотонной, может быть представлена в виде разности двух ограниченных и монотонных функций.

$U(x) = U_1(x) - U_2(x)$

Он является функцией с ограниченным изменением.

В случае, если интегрирующая функция U(x) имеет производную U'(x), ограниченную и интегрируемую по Риману, интеграл Стилтьеса сводится к интегралу Римана по следующей формуле:

$$\int_a^a f(x)dU(x) = \int_a^a f(x)dU'(x)dx$$

Свойства неопределенного интеграла:

$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

$\int d(F(x)) = F(x) + C$

$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

при $\int f(x)dx = F(x) + C$ $\int f(u)du = F(u) + C$,

где $u = \varphi(x)$ — производная функция, которая имеет непрерывную производную

Методы интегрирования:

1. метод разложения.

$$\int g(x)dx = \int g_1(x)dx + \int g_2(x)dx$$

2. метод интегрирования по частям.

v и u — некоторые дифференцируемые функции от x,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

3. метод введения нового аргумента

при

$\int g(x)dx = G(x) + C$

$\int g(u)du = G(u) + C$,

где $u = \varphi(x)$- непрерывно дифференцируемая функция.

4. Метод подстановки

При непрерывной g(x) и $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывна, как и ее производная $\varphi'(t)$

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Несколько свойств преобразования Фурье:

- если прообраз сдвинуть на постоянную a, то его образ умножится на $e^{-ia\lambda}$;

  $f(ax)$ преобразуется в $\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$;
- если от $f(x)$ взять производную, то образ функции умножится на $i\lambda$. (при учете, что $f(x)$ и $f'(x)$ абсолютно интегрируемы и $f'(x)$ непрерывна);
- если функция зависит от двух параметров, то ее образ тоже будет зависеть от этих двух параметров
- если $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$,

  то преобразовании Фурье функции $f(x)$ будет ограниченной непрерывной функцией, стремящейся к нулю при $|\lambda| \to 0$.

  $\hat{g} = \hat{f_1} + \hat{f_2}$, где g=$f_1 + f_2$

  $\hat{g} = a\hat{f}$, где g=af, a=const
- если при схождении последовательности функций $\{f_n\}$ к функции f(x)

$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n - f| dx = 0$, то последовательность преобразований Фурье этих функций $\{\hat{f_n}\}$ сходится к преобразованию Фурье $\hat{f}$ равномерно для всех значений x.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Для такого интеграла справедливы все свойства интегралов с бесконечными пределами. Интеграл от функции, стремящейся к бесконечности при приближении к обоим концам промежутка, определяется аналогично интегралу с двумя бесконечными пределами.

Одним из известных и часто применяющихся интегралов является гамма-функция.

Гамма-функция — математическая функция, расширяющая понятие факториала на поле комплексных чисел. Обозначается $\Gamma(z)$. Понятие было введено российским, немецким и швейцарским математиком Леонардом Эйлером (04.04.1707-07.09.1783), ее обозначение — французским математиком Адриеном Мари Лежандром(18.09.1752-10.01.1833).

Гамма-функция определяется:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

Данный интеграл сходится при $p > 0$.

Свойства гамма функции

$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

$\Gamma(n+1) = n!$ для натуральных n

33. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Интегральная геометрия — это раздел математики, в котором изучаются числовые характеристики различных геометрических объектов, получаемые при помощи интегрирования.

Числовая характеристика должна удовлетворять следующим требованиям:

1. Аддитивности (мера множества, которое состоит из нескольких частей, равна сумме мер этих частей);
2. Инвариантности относительно движений (два множества, которые отличаются друг от друга только положением, имеют одинаковые меры).

Основные задачи интегральной геометрии заключаются в нахождении длин, площадей и объемов. Они решаются с помощью интегрирования.

Примерами таких числовых характеристик могут быть длина, площадь, объем.

Интегральная геометрия получила развитие благодаря задачам геометрической вероятности, определяемым как соотношение мер множества благоприятных случаев к мере всех случаев. Первым и наиболее известным примером является задача Бюффона.

Задача Бюффона (задача об игле):

На плоскость, с нанесенными на нее на расстоянии 2a одна от другой параллельными прямыми, бросается игла длиной 2l (при этом 2l<2a). Положение иглы характеризуется двумя координатами (расстоянием от центра до ближайшей прямой — x, $0 \leq x \leq a$, и углом ее наклона к прямой ц. $0 \leq ц \leq \pi/2$).

Игла всегда пересекает хотя бы одну из прямых, если x ≤ lsinц.

В данной задаче по геометрическому определению вероятность случайного события

34. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения, содержащие неизвестные функции под знаком интеграла, называются интегральными.

Интегральные уравнения получили развитие благодаря тому, что многие задачи физики и математической физики сводятся к интегральным уравнениям.

Уравнение вида:

$$\int_a^b K(x_1,t)u(t)dt = f(x)$$

Называется линейным интегральным уравнением первого рода.

Линейным интегральным уравнением второго рода (уравнением Фредгольма) называется уравнение вида:

$$U(x_1) - \int_a^b K(xt)u(t)dt = f(x), \quad (1)$$

при $f(x) \equiv 0$ (1) называется однородным уравнением Фредгольма.

Обычно уравнение Фредгольма рассматривают с параметром л:

$$U(x) - \lambda \int_a^b K(xt)u(t)dt = f(x). \quad (2)$$

Во всех уравнениях $K(x,y)$ и $f(x)$ — известные функции, $u(x)$ искомая функция,

$$a \leq x \leq b, a \leq y \leq b.$$

Функции $K(x,y), f(x)$ и $u(x)$, а так же параметр λ могут принимать действительные и комплексные значения.

35. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Испытанием называется реализация комплекса условий, который может воспроизводиться неограниченное число раз. При этом, комплекс включает в себя случайные факторы, благодаря которым исход испытания не однозначен. Примерами испытания служат бросок игральной кости, подбрасывание монеты.

Результатом испытания является событие. События бывают:

1. Достоверные, т.е. происходящие всегда (Солнце завтра утром встанет)
2. Невозможные, т.е. не происходящие ни при каких условиях (На шестигранном кубике выпадет 7)
3. Случайные, т.е. может как произойти, так и не произойти (Выпадет решка)

Элементарным событием называется конкретный результат события, в результате испытания происходят только элементарные события. Совокупность всех возможных исходов конкретного испытания называется пространством элементарных событий.

Например, испытание — подбрасывание монеты, элементарное событие — выпадение орла.

Сложным событием называется произвольное подмножество пространства элементарных событий. Сложное событие настулает тогда и только тогда, когда в результате испытаний произошло элементарное событие, принадлежащее сложному.

То есть если в результате испытания произойдет элементарное событие, принадлежащее нескольким сложным событиям, то происходят все сложные события.

Пример:

Испытание — подбрасывание шестигранного кубика, элементарное событие — выпадение 6, сложные события — выпадение число больше 4 и выпадение четного числа.

36. ЧАСТОСТЬ НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЯ. СВОЙСТВА ЧАСТОСТИ

Пусть пространство элементарных событий конечно и состоит из n элементарных событий. В этом случае в качестве возможных исходов испытаний рассматривают 2^n событий — множество всех подмножеств пространства элементарных событий, и невозможное событие 0:

$\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$,

$A_1 = 0$

$A_2 = (\omega_1)$

$A_3 = (\omega_2)$

$A_4 = (\omega_3)$

$A_5 = (\omega_1, \omega_2)$

$A_6 = (\omega_2, \omega_3)$

$A_7 = (\omega_1, \omega_3)$

$A_8 = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

Обозначим через A_i $(i = 1, 2, \ldots, 2^n)$, подмножества событий, а всю систему через F. Пусть произвольное событие A включается в F. Проводим серию испытаний n, в каждом из которых произошло событие A. Частостью наступления события A в n испытаниях называется число:

$$W_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

Свойства частности:

$0 \leq W_n(A) \leq 1$

частность достоверного события равна единице, невозможного — нулю.

частость суммы попарно несовместных событий равна сумме частостей.

Предположим, что результатом некоего испытания является событие A. Исходя из определения суммы, это означает, что в этом испытании произошло событие A, что, в свою очередь, означает невозможность какого-либо события A_i, (i≠j)

В частном случае, когда $K(x, y)$ обращается в нуль при $y > x$, получается уравнение Вольтерра (2).

Особое интегральное уравнение — это интегральное уравнение, у которого хотя бы один из пределов интегрирования бесконечен или $K(x,y)$ обращается в бесконечность на хотя бы одной из точек квадрата $a \le x \le b, a \le y \le b$ или на некоторой линии.

Линейные интегральные уравнения второго рода решаются следующими методами:

- решение $u(x)$ получается в виде ряда по степеням λ (сходящегося в круге $|\lambda| < K$) с коэффициентами, зависящими от x (метод Вольтерра-Неймана)
- решение $u(x)$ ищется при тех значениях λ, при которых оно вообще существует. Решение выражается через некоторые целые функции от λ (метод Фредгольма)

В случае если $K(x,y) = K(y,x)$, решение $u(x)$ выражается в виде ряда по ортогональным функциям $uk(x)$, являющимися решениями соответствующего однородного уравнения.

В некоторых случаях для упрощения можно применить преобразование Лапласа (Преобразование Лапласа функции f(x) называется переход от f(x) к функции

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-px} f(x)dx.$$

Обратное преобразование осуществляется формулой Меллина

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px}F(p)dp,$$

где функция f(x) называется оригиналом, а функция F(p) — ее изображением.)

$$P(A)=\frac{S_a}{S_\Omega}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\cdot \sin\varphi d\varphi}{a\frac{\pi}{2}}=\frac{2\cdot 1}{a\cdot\pi}$$

О том, насколько данная математическая модель соответствует действительности, можно судить по результатам следующего эксперимента.

Предположим, игла брошена n раз и в m раз произошло событие, при котором игла пересекает прямую. Тогда, исходя из статистического определения вероятности, при больших значениях n частота будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{m}{n}\approx P(A)=\frac{2\cdot 1}{a\cdot\pi}$$

Откуда следует, что экспериментальная оценка $\hat{\pi}$ имеет вид $\hat{\pi}\approx 2\frac{l\cdot n}{a\cdot m}$

При этом относительная погрешность оценки числа $\hat{\pi}$ составляет $\varepsilon\hat{\pi}=\frac{\hat{\pi}-\pi}{\hat{\pi}}\cdot 100\%$,

откуда $\pi = 3{,}141592654$ с погрешностью до девятого знака после запятой.

В конце XIX — начале XX века исследования по интегральной геометрии все еще связаны с геометрическими вероятностями (работы М. Крофтона и Э. Пуанкарте). Но после работы Э. Картана (1896) они уже входят в теорию интегральных инвариантов, а в 20-х годах XX века складываются в самостоятельную теорию с различными приложениями (к изучению выпуклых поверхностей, геометрической оптике, теории излучения и к геометрии в целом).

в этом событии, так как все события попарно несовместны.

Следовательно,

$$W_n(A)=\frac{n_a}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_{Ai}}{n}=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_{Ai}}{n}=\sum_{i=1}^{k} W_n(A)$$

При этом использование теории вероятности для описания испытания возможно только в том случае, если для любого события А частость его наступления в бесконечной серии испытаний имеет одинаковый предел, который является вероятностью наступления события А.

Отсюда вероятность наступления произвольного события — это частость наступления данного события в бесконечной серии испытаний.

Людвиг фон Мизес, американский ученый, в попытке определить вероятность как предел частости при числе испытаний, стремящемся к бесконечности, создал теорию вероятности, базирующуюся на этом определении, но его труд не был признан из-за большого количества логических несоответствий.

Арифметика событий.

Событие С называется суммой событий А и В, если оно состоит из элементарных событий, входящих в А или в В. Элементарное событие входящее и в А, и в В, входит в С только один раз.

Сумма произвольного числа событий состоит из всех элементарных событий, входящих в них.

Событие С называется произведением событий А и В, если оно состоит из элементарных событий, входящих и в А, и в В.

Событие С называется разностью событий А и В, если оно состоит из элементарных событий, входящих в А и не входящих в В.

События А и В называются несовместимыми, если они никогда не произойдут в результате одного испытания.

37. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА

Вероятностное пространство — Ω, σ и P, где Ω — пространство элементарных событий для данного испытания, σ — алгебра, заданная на пространстве Ω (система возможных событий, интересующая исследователя), P — σ — аддитивная неотрицательная функция аргументами которой являются аргументы из σ — алгебры. P удовлетворяет следующим аксиомам теории вероятности:

$\forall A \in \sigma\, P(A) \leq 1$, где $P(A)$ — вероятность наступления события А.

Вероятность достоверного события равна единице. ($P(\Omega) = 1$)

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей. ($P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$, где k — конечное или бесконечно большое число, следовательно, вероятность невозможного события равна нулю)

По определению суммы

$\Omega + V = \Omega$, где Ω и V – несовместные события.

Исходя из третьей аксиомы теории вероятности

$$P(\Omega + V) = P(Q) = P(U) = 1$$

$$P(\Omega) + P(V) = P(\Omega),$$

$$1 + P(V) = 1,$$

$$P(V) = 1$$

Пусть Ω состоит из конечного числа элементарных событий $\Omega = \sum_{i=1}^{n} A_i$, элементарные события несовместимы, тогда по третьей аксиоме имеем:

38. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ФОРМУЛЫ УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Условной вероятностью наступления события А при условии события В называется вероятность наступления события А в результате испытания, если известно, что события В уже произошло.

Вывод формулы условной вероятности для случая равновероятных событий.

Пусть в данном испытании произошло одно из t событий, входящих в В. Поскольку все события в В равновероятны, то вероятность наступления произвольного события из В равно 1/t. Тогда по классическому определению вероятности событие А произойдет с вероятностью r/t:

$$P(A/B) = \frac{r/m}{t/m} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$$

Для общего случая эту формулировку доказать невозможно, поэтому она вводится как правило.

Рассмотрим n_B испытаний, в которых произошло событие В, и n_A испытаний, в которых произошло событие А. Попробуем найти условную частость наступления А, если известно, что В — произошло.

Под вероятностью наступления события понимается предел частости наступления события в достаточно длинной серии испытаний, соответственно, мы сможем использовать это для обоснования формулы.

39. КОМПОЗИЦИЯ ИСПЫТАНИЙ

Композиция испытаний — это сложное испытание, состоящее в проведении нескольких испытаний. Далее для простоты мы будем рассматривать композицию двух испытаний — первого и второго.

Композиция испытаний порождает вероятностное пространство вида:

$\{E_iQ_j\}, \{P(E_iQ_j)\}$, где $i = 1,2,\ldots,m_1, j = 1,2,\ldots,m_2$. E_iQ_j – композиционное событие

В общем случае по $P(E_i)$ и $P(Q_j)$ вычислить $P(E_iQ_j)$ невозможно.

Рассмотрим частный случай, когда это возможно.

Два испытания называются независимыми, если различные исходы обоих испытаний не связаны между собой случайными факторами.

Пусть испытания независимы, и в результате проведения первого испытания произошло событие E_i, в результате второго испытания произошло, что угодно.

Тогда сложное событие, определяющее исход композиции двух испытаний, имеет вид:

$$A = \sum_{j=1}^{m_2} E_iQ_j,$$

и равно сумме комбинаций исходов первого и второго испытания.

Вероятность сложного события А:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{m_2} P(E_iQ_j) = P(E_i),$$

то есть результаты второго испытания не зависят от результатов первого.

Аналогично вычисляем вероятность события В (результат второго испытания Q_j, результат первого испытания любой).

Тогда вероятность сложного события В является суммой вероятностей комбинаций вида $E_iQ_j, i = 1,\ldots,m_1$

40. КОМПОЗИЦИЯ N НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

N испытаний называются независимыми, если неоднозначность исхода каждого из них определена независимыми между собой группами факторов.

Пусть A_1: событие произошло в результате проведения первого композиционного испытания. Тогда:

$$A_1 = \sum_{j2=1}^{m2}\sum_{j3=1}^{m3}\ldots\sum_{jn=1}^{mn} E_{j1}^1 E_{j2}^2 \ldots E_{jn}^n$$

$$P(A_1) = P\left(\sum_{j2=1}^{m2}\sum_{j3=1}^{m3}\ldots\sum_{jn=1}^{mn} E_{j1}^1 E_{j2}^2 \ldots E_{jn}^n\right) = \sum_{j2=1}^{m2}\sum_{j3=1}^{m3}\ldots\sum_{jn=1}^{mn} P(E_{j1}^1 E_{j2}^2 \ldots E_{jn}^n)$$

Пусть A_n: событие E_{jn}^1 произошло в результате проведения первого композиционного испытания. Тогда:

$$A_n = \sum_{j2=1}^{m2}\sum_{j3=1}^{m3}\ldots\sum_{jn=1}^{mn} E_{j1}^1 E_{j2}^2 \ldots E_{jn}^n$$

$$P(A_n) = P\left(\sum_{j2=1}^{m2}\sum_{j3=1}^{m3}\ldots\sum_{jn=1}^{mn} E_{j1}^1 E_{j2}^2 \ldots E_{jn}^n\right) = \sum_{j2=1}^{m2}\sum_{j3=1}^{m3}\ldots\sum_{jn=1}^{mn} P(E_{j1}^1 E_{j2}^2 \ldots E_{jn}^n)$$

$$P(A_i) = P(E_{ij}), i = 1,\ldots,n$$

Общая структура независимых событий в композиционном пространстве:

Первое событие — событие, которое происходит первым в композиционном испытании

N событие — событие, которое происходит n-ым в композиционном испытании.

Энтропия — мера неопределенности исхода испытания до испытания. Первым, кто функционально задал выражение энтропии, был К.Шеннон:

$$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\},$$

$$\{P(\omega_1), P(\omega_2), \ldots, P(\omega_n)\},$$

Условная частость:

$$W_n\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\left(\frac{n_{AB}}{n}\right)}{\left(\frac{n_B}{n}\right)} = \frac{W_n(AB)}{W_n(B)}$$

Если рассмотреть AB как одно событие D: $P(DC) = P(D)P\left(\frac{C}{D}\right)$, иначе:

$P(D) = P(AB) = P(A) - P\left(\frac{B}{A}\right)$, $P(ABC) = P(DC) = P(D) - P\left(\frac{C}{D}\right) = P(A) - P\left(\frac{B}{A}\right)P\left(\frac{C}{D}\right) = P(A)P\left(\frac{B}{A}\right) - P\left(\frac{C}{AB}\right)$

Рассмотрим систему событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Докажем, что вероятность их совместного наступления будет: $P(A_1, A_2, \ldots, A_k) = P(A_1) - P(A_2/A_1)P(A_3/A_2A_1) \ldots P(A_k/A_1, A_2, \ldots, A_{k-1})$

Используем метод математической индукции. Пусть данная формула будет верна при k=2. Докажем для k-1:

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}) = P(A_1) - P\left(\frac{A_2}{A_1}\right) - P\left(\frac{A_3}{A_2A_1}\right) - \cdots - P\left(\frac{A_{k-1}}{A_1}, A_2, \ldots, A_{k-2}\right)$$

Используем событие B

$B = A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$

$P(A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}) = P(B)$

$P(A_1, A_2, \ldots, A_k) = P(A_kB) = P(B)P(A_kB)$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Классическое определение вероятности.

Для начала введем понятие равновероятных событий. Равновероятные события – это такие события, ни одному из которых нельзя отдать предпочтение до начала эксперимента. Примером может служить бросок игральной кости. Элементарные события – выпадение конкретного – числа являются равновероятными.

Пусть Ω состоит из конечного числа равновероятных элементарных событий. Тогда достоверное событие $U = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$, где i – количество равновероятных событий:

$$P(U) = \sum_{i=1}^{n} P\omega_i, \sum_{i=1}^{n} P\omega_i = 1, \text{то есть } \forall\, i\; P(\omega_i) = \frac{1}{n}$$

При равноправных элементарных событиях, которые соответственно являются равновероятными, вероятность наступления произвольного события равна дроби, чей числитель равен числу элементарных событий, которые входят в данное событие, а знаменатель равен общему числу элементарных событий.

$$H = -\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i)\log_2 P(\omega_i)$$

Докажем, что энтропия системы с конечным числом состояний достигает максимума, когда все состояния равновероятны. Для этого рассмотрим энтропию системы как функцию вероятностей $p_1, \ldots, p_n$ и найдем условный экстремум функции при условии, что:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Применив метод неопределенных множителей Лагранжа, будем искать экстремум функции:

$$F = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Неопределенность исхода испытания до испытания автоматически определяет информативность исхода после испытания.

Найдем энтропию композиционного пространства для случая независимых испытаний:

$$-\sum_{i=1}^{n1}\sum_{j=1}^{n2} p_i q_j \log_2 p_i q_j = \sum_{i=1}^{n1} p_i \log_2 p_i \sum_{j=1}^{n2} q_j - \sum_{i=1}^{n1} p_i \sum_{j=1}^{n2} p_i \log_2 q_j = H(\Omega_1) + H(\Omega_2);$$

$$0 \le H(\Omega_1 \times \Omega_2) \le H(\Omega_1) + H(\Omega_2).$$

P(B) = $\sum_{j=1}^{m1} P(E_iQ_j) = P(Q_j)$, поскольку исходы первого испытания не влияют на исходы второго.

Из определения AB получаем, что $AB = E_iQ_j$ (так как E_iQ_j – единственное событие, входящее и в A, и в B), следовательно $P(AB) = P(E_iQ_j) = P(E_i)P(Q_j)$.

Общая структура независимых событий в композиционном пространстве, порожденном композицией испытаний:

A= $\sum_{i=1}^{n1}\sum_{j=1}^{m2} E_iQ_j$

При этом сложное событие B определяет все возможные комбинации результатов двух испытаний независимо друг от друга. Результатом первого испытания являются события $E_1, E_2, \ldots, E_{m1}$

На практике при решении задач, которые связаны с независимыми испытаниями, зачастую вместо построения композиционных пространств элементарных событий используют формально неверное уравнение P(AB)=P(A)$\times P(B)$.

41. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Случайной величиной называется измеримая числовая скалярная функция $\varphi(\omega)$, элементами которой являются элементарные события вероятностного пространства (Ω, σ, p).

Числовая скалярная функция — это функция, удовлетворяющая следующему условию: $\forall x$ событие $\{\omega: y(\omega) < \varepsilon\} \in \sigma$ - алгебре, и, следовательно, имеет вероятность наступления.

В соответствии с определением случайной величины можно ввести числовую скалярную функцию F(x), $x \in \Omega$, определенную для каждого действительного x и по определению равную вероятности наступления события: $F(x) = P(\omega: y(\omega) < x), 0 \le F(x) \le 1$.

Эта функция называется функцией распределения случайной величины $\varphi(\omega)$.

Борелевская функция — это функция, которая определяется в системе борелевских множеств (при этом все известные аналитические функции являются борелевскими).

Если в результате испытания случайная величина может принять значение из конечного или счетного множества возможных числовых значений, она называется дискретной.

Случайные величины в дальнейшем будем обозначать большими буквами латинского алфавита: X, Y, Z.

Вероятностное пространство дискретной случайной величины задается в виде:

$X = (x_i, p_i)\ i = 1, 2, \dots n$,

где n — конечное или бесконечное.

В качестве примера:

Рассмотрим такое испытание — композиция n-независимых испытаний. В каждом из этих испытаний происходит событие A с вероятностью p либо 1-p.

42. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ. СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Математическое ожидание — это мера среднего значения случайной величины. Обозначается $M(X)$.

Пусть случайная величина Y является функцией $f(x)$ от случайной величины X, построим вероятностное пространство случайной величины $Y = f(x)$:

x	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$
p	p_1	p_2	...	p_n

Если есть одинаковые значения $f(x_i)$, они заменяются одним, вероятность которого равна сумме соответствующих вероятностей.

Математическое ожидание случайной величины Y равняется:

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) p_i$$

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание величины k:

$$V_k = MX^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$$

Дисперсией случайной величины X называется центральный момент второго порядка случайной величины X. Дисперсия вычисляется по формуле:

43. МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

Симон Дени Пуассон (21.06.1781-25.04.1840) — французский физик и математик.

Распределение Пуассона моделирует случайную величину, которая является числом событий, произошедших за определенное время, если данные события происходят с некоторой определенной средней интенсивностью и независимо друг от друга.

Первая модель распределения Паусcона.

Пусть проведена неограниченно большая серия испытаний. В результате каждого испытания на числовой оси случайным образом появляется точка. Случайное распределение точек на оси удовлетворяет следующим правилам:

Вероятность того, что на отрезок попадет определенное количество точек, зависит только от размеров отрезка, т.е. не зависит от положения отрезка на числовой оси. (Стационарность)

Вероятность того, что на достаточно малый отрезок длиной Δx попадет одна точка, является бесконечно малой величиной порядка Δx, вероятность того, что на этот же отрезок попадет две, и более, точки, является бесконечно малой большего, чем Δx порядка. (Ординарность)

Вероятность того, что на данный отрезок попадет определенное количество точек, не зависит от вероятности попадания точек на отрезок, не пересекающийся с данным. (Отсутствие последствия)

При этом необходимо найти вероятность того, что на заданный отрезок l попадает m точек.

Пусть x_1- случайная величина, обозначающая количество точек, выпавших на отрезок длины l.

Рассмотрим отрезок l на числовой оси и определим $m \times l = l$. Исходя из свойства стационарности математическое ожидание числа точек равно для всех отрезков.

Вторая модель распределения Пуассона.

Рассмотрим обычную схему биномиального распределения, в котором p и n малы. Тогда точ-

44. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим пространство элементарных событий как совокупность всех точек числовой оси. В этом случае можно ввести функцию распределения вероятностей F(x):

$F(x) = P(X < x)$.

Пусть F(x) непрерывна, найдем вероятность того, что случайная величина X равна значению a (a — произвольное действительное число): $P(X = a)$.

Рассмотрим неравенство:

$X \le a = \left(x < a + \frac{1}{n}\right)$,

$x < a + \frac{1}{n}$, $\left(x < a + \frac{1}{n}\right)$,

$\frac{1}{n}$, $x \le a$

Следовательно:

$\left(F\left(a + \frac{1}{n}\right) - F(a)\right) = 0$

То есть принципиально событие может произойти, но его вероятность равна нулю.

Случайная величина X называется непрерывной, если ее пространством элементарных событий является вся числовая ось, либо отрезок (отрезки) числовой оси, а вероятность наступления любого элементарного события равна нулю.

Важный класс непрерывных случайных величин — абсолютно непрерывные случайные величины. Это случайные величины, распределение которых имеет плотность.

$$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

При вычитании из сложного события конечного или счетного множества вероятность наступления нового события не изменяется.

$$D(X) = \mu^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - v)^2 p_i$$

Дисперсия является мерой концентрации результатов конкретных испытаний над случайной величиной А.

Свойства математического ожидания:

M(C)=C

M(CX)=CM(X)

$$M(CX) = \sum_{i=1}^{s} Cx_i p_i = C \sum_{i=1}^{s} x_i p_i = C(MX)$$

M(XY)=M(X)M(Y)

M(X+Y)=M(X)+M(Y)

1. M(X+a)=M(X)+a,a=const

$$M(X+a) = \sum_{i=1}^{s} (x_i + a) p_i = \sum_{i=1}^{s} x_i p_i + \sum_{i=1}^{s} a p_i + M(X) + a \sum_{i=1}^{s} p_i = \left[\sum_{i=1}^{s} p_i = 1 \right] = M(X)$$

2. M(aX+b)=aM(X)+b,a;b=const

$$M(aX+b) = \sum_{i=1}^{s} (ax_i + b) p_i = \sum_{i=1}^{s} ax_i p_i + \sum_{i=1}^{s} b p_i = a \sum_{i=1}^{s} p_i + b = \sum_{i=1}^{s} p_i = aM(X) + b$$

3. M(aX+bY)=aM(x)+bM(Y)

Математическое ожидание сохраняет неравенства. То есть если $0 \le X \le Y$ почти наверное, и Y — случайная величина с конечным математическим ожиданием, то математическое ожидание случайной величины X тоже конечно и, более того:

$$0 \le M(X) \le M(Y)$$

Пространство:

$\{A^{\alpha 1}, A^{\alpha 2}, \dots, A^{\alpha n}\}$

$$P\{A^{\alpha 1}, A^{\alpha 2}, \dots, A^{\alpha n}\} = \prod_{j=1}^{n} P(A^{\alpha j}) = p^m q^{n-m}$$

X можно задать:

$$X = \frac{\{0 \;\dots\; 1 \;\dots\; 2 \;\dots\; m \;\dots\; n\}}{\{q^n \;\dots\; C_n^1 p q^{n-1} \;\dots\; C_n^2 p^2 q^{n-1} \;\dots\; C_n^m p^m q^{n-m} \;\dots\; p^n\}}$$

Где верхняя строчка — совокупность возможных числовых значений, которые может принимать случайная величина, а нижняя — вероятность наступления этих числовых значений.

В большинстве практических задач естествознания отсутствует промежуточный этап: испытание, Ω — пространство всех возможных исходов испытания, $\gamma(\omega)$ — числовая скалярная функция, элементы которой $\omega \in \Omega$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины:

1. Математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

2. Дисперсия

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right), \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2$$

Плотность вероятности в точке x — числовая скалярная функция f(x) действительного аргумента x в данной точке, если в ней существует следующий предел:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Свойства плотности вероятности:

Плотность вероятности — неотрицательная функция

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(U) dU$$

$$F(x) = F(x) - F(-\infty)$$

$$P(a \le x \le b) = \int_{a}^{b} f(x) dx$$

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x) dx - \int_{-\infty}^{a} f(x) dx = \int_{a}^{b} f(x) dx$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ интеграл от плотности по всему пространству равен единице

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = P(X < \infty) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

Следовательно, в случае если пространством элементарных событий является отрезок числовой оси, пространство событий формально может быть распространено на всю числовую ось, если вне отрезка значение плотности вероятности принять за нулевое.

ная формула вероятности события в нескольких испытаниях имеет вид:

$$C_n^m p^m q^{n-m}$$

При достаточно больших n в связи со сложностью вычисления применяют приближенную формулу:

$$\frac{(pn)^m}{m!} e^{-pn},$$

так как искомая вероятность является членом построенного гипотетического ряда вероятностей, находится в малой окрестности предельного значения этого ряда, а это значение является допустимой хорошей аппроксимацией значений исходной вероятности.

45. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексное число — это выражение вида $z = x + iy$, где x — действительная часть (Re), а y — мнимая (Im) часть комплексного числа z, а i — мнимая единица, определенная как $i^2 = -1$.

Комплексное число может быть определено как упорядоченная пара действительных чисел (x,y).

Введение комплексных чисел позволяют найти решение уравнений вида:

$x^2 + a^2 = 0$,

при $a \neq 0$.

Решение будет иметь вид $x = \pm ia$.

Для $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Для комплексных чисел z_1, z_2, z_3 справедливы следующие свойства:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Исходя из о пределения комплексного числа как пары упорядоченных вещественных чисел, получаем однозначное соответствие между комплексным числом и точкой на плоскости. Точка с координатами (x,y), где x=Re(z), y=Im(z), называется аффиксом комплексного числа z.

46. АКСИОМАТИКА. ФОРМАЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, σ, ρ). Зададим m числовых измеримых скалярных функций $\varepsilon_1(\omega), \ldots, \varepsilon_m(\omega)$, каждая из которых одномерна по определению. Возьмем m произвольных действительных чисел и рассмотрим событие A, такое что:

$A = \{\forall\omega: \varepsilon_1(\omega) < x_1, \ldots, \varepsilon_m(\omega) < x_m\}$.

Данное событие является пересечением событий

$A_i = \{\forall\omega: \varepsilon_i(\omega) < x_i\}$

то есть

$$A = \prod_{i=1}^{m} A_i$$

Из того, что каждое $A_i \in y$-алгебре следует, что и $A \in \sigma$-алгебре. Из этого следует, что существует вероятность наступления события A и существует числовая скалярная функция m аргументов, численно равная вероятности наступления события A:

$F(x_1, \ldots, x_m) = P(A)$

Это m-мерная функция распределения m-мерной величины.

Свойства многомерного распределения:

Если хотя бы одно значение аргумента функции многомерного распределения равно $-\infty$, то значение функции равно нулю, как вероятность невозможного события.

Если все значения всех аргументов функции многомерного распределения равны $+\infty$, то значение функции равно единице, как вероятность достоверного события.

Функция многомерного распределения не убывает при любой совокупности ее аргументов.

47. ДВУМЕРНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайные величины могут принимать *дискретные, непрерывные* и *дискретно-непрерывные* значения. По этому признаку случайные величины классифицируют на дискретные, непрерывные и смешанные (дискретно-непрерывные).

При исследовании на схеме испытаний может быть определена как отдельная случайная величина — одномерная или скалярная, так и целая система одномерных взаимосвязанных случайных величин — многомерная или векторная.

Если результатом некоего испытания является появление двух чисел и некоторого счетного или конечного множества пар чисел, это испытание может являться единичным испытанием или композицией из двух, порождающих одномерную дискретную величину.

Двумерная случайная величина — это система двух одномерных величин, которые при этом являются дискретными случайными величинами. Пусть A — сложное событие, при котором испытывается двумерная случайная величина XY, случайная величина X принимает значения x_i, а Y — любое значение.

Условное математическое ожидание случайной величины при условии, что другая величина приняла заданное значение, определяет точку, вокруг которой группируются результаты испытаний.

Условная дисперсия определяет уровень концентрации значений результатов испытаний над случайной величиной относительно условного математического ожидания. На практике математическое ожидание и условная дисперсия используется следующим образом — при испытаниях над X, Y измерение результатов испытания возможны только для одной из этих величин. Если рассматривать пространство элементарных событий как совокупность точек числовой оси, функция распределения будет иметь следующий вид: $F(x) = p(X > x)$

48. НАЧАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ. ЕДИНИЧНАЯ ФУНКЦИЯ ХЕВИСАЙДА

Пусть имеется кусочно-непрерывная функция f(t) действительной переменной, определенная при t ≥ 0. Считаем, что существуют такие числа M и s, что:

$|f(t)| < Me^{st}, t \in [0, +\infty)$.

Такая функция называется функцией конечного роста, а нижняя грань s_C называется показателем роста функции.

Далее пусть имеется комплексная функция e^{-pt} действительной переменной t, где

$p = a + ib, a > 0$. Тогда произведение $e^{-pt}f(t)$ тоже является комплексной функцией действительной переменной, и несобственный интеграл от этого произведения существует при вышепринятых условиях:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt.$$

Этот интеграл называется лапласовым изображением функции $f(t)$, а сама функция — оригиналом. Соответствие F(p) и f(t) называется преобразованием Лапласа и обозначается F(p)=Lf(t).

Теорема единственности:

Если две функции имеют одно и то же лапласово изображение, эти две функции тождественно равны.

Преобразование Лапласа — это интегральное преобразование, которое связывает функцию F(s) комплексного переменного (изображение) с функцией f(x) действительного переменного (оригинал). Оно позволяет исследовать свойства динамических систем и решать интегральные и дифференциальные уравнения. Основной причиной широкого распространения преобразования Лапласа в качестве способа проведения расчетов является то, что многим соотношениям и операциям над оригиналом соответствуют более простые соотношения над изображениями.

Функция многомерного распределения непрерывна практически всюду.

Отсюда следует, что многомерная функция распределения позволяет в m-мерном арифметическом пространстве задавать счетно-аддитивную меру(функцию на поле, которое порождено всеми m-мерными полуинтервалами объема). Строим борелевское поле — минимальную σ —алгебру в m-мерном арифметическом пространстве. При этом любая скалярная функция m-аргументов удовлетворяет свойствам m-мерной функции распределения, задавая вероятностное пространство.

Это приводит к тому, что пространство элементарных событий — это m-мерное арифметическое пространство. Для оценки m-мерной функции распределения рассмотрим числовую скалярную функцию m действительных аргументов $g(x_1, x_2, ..., x_m)$, она является борелевской (т.е. отображение одного топологического пространства в другое, для которого прообраз любого борелевского множества является борелевским множеством). При этом скалярная функция $\eta(\omega) = g(\xi_1(\omega), ..., \xi_m(\omega))$ измерима и является случайной величиной.

Исходя из выше перечисленного получаем, что комплексное число может быть однозначно определено радиус-вектором заданной длины и углом с положительным направлением оси Ох.

Тригонометрическая формула комплексного числа:

$z = r(cos\varphi + isin\varphi),$

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а угол φ такой, что $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$

Для тригонометрической записи формула произведения комплексных чисел следующая:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Формула Муавра:

(cosц + isinц)^n = cos(nц) + isin(nц).

Элементарными функциями комплексной переменной называют функции, полученные из элементарных функций вещественной переменной, разложенных в степенной ряд следующим образом: если разложение элементарной функции вещественной переменной имеет вид $y = f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, то соответствующая функция комплексной переменной z будет иметь вид: $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, где $i = 1,2, ..., n$, для обоих рядов. Ряд должен быть сходящимся.

Основные свойства преобразования Лапласа:

$L(af_1(t) + bf_2(t)) = aF_1(p) + bF_2(p)$

Данное свойство справедливо для любых комплексных a и b и любого числа функций.

$Lf(at) = \frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$, где a>0

$Lf(t - b) = e^{-pb}F(p)$, где b>0

$Lf(e^{-at}f(t)) = F(p + a)$, где a — любое комплексное число.

Функция Хевисайда — это кусочно-постоянная функция, которая для отрицательных значений аргумента равна нулю, для положительных — единице. В нуле ее обычно доопределяют некоторым числом, т.к. в большинстве случаев значение этой функции в нуле не имеет значения.

Довольно часто используется единичная функция Хевисайда:

$$\sigma_o(t) = \begin{cases} 1\ при\ t \geq 0 \\ 0\ при\ t < 0 \end{cases}$$

Ее изображение равно $\frac{1}{p}$.

Некоторые наиболее часто используемые изображения Лапласа:

$L(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$, где n — целое, Re(p)>0

$L(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}$, Re(p)>Re(a)

$L(sin(at)) = \frac{a}{(p^2+a^2)}$, Re(p)>|Im(a)|

$L(cos(at)) = \frac{p}{(p^2+a^2)}$, Re(p)>|Im(a)|

Если она непрерывна, вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение a (произвольное действительно число): p(x=a)

$x \leq a = \left(x < a + \frac{1}{n}\right)$,

$x < a + \frac{1}{n}$,

$\frac{1}{n}$,

$x \leq a$.

Откуда:

$$\left(F\left(a + \frac{1}{n}\right) - F(a)\right) = 0$$

Непрерывная случайная величина — случайная величина, пространством элементарных событий которой является вся числовая ось, либо ее отрезки, а вероятность любого элементарного

$$P(a \leq X < b) = P(s \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

При вычитании счетного или конечного множества из сложного события вероятность нового события не изменяется.

49. МЕТОД ГАУССА

Иоганн Карл Фридрих Гаусс (30.04.1777-23.02.1855) — немецкий астроном, физик и один из величайших математиков, «король Математиков».

Метод Гаусса — классический метод решения систем линейных алгебраических уравнений путем последовательного исключения переменных. При этом в результате элементарных преобразований система алгебраических уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида, откуда последовательно находятся все переменные.

Несмотря на то, что этот метод носит имя Гаусса, он не является его первооткрывателем. Первое описание этого метода было найдено в трактате «Математика в девяти книгах», составленном между I и II веками н.э. в Китае.

Пусть имеется система линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

относительно x_i. Если все b_i равны нулю, то система называется однородной и неоднородной в противном случае.

Метод Гаусса заключается в преобразовании исходной системы уравнений в так называемую систему ступенчатого вида. При решении системы линейных уравнений этим методом полагается, что диагональные коэффициенты (у которых m=n) не равны нулю. Если в изначальной системе или в процессе преобразования какой-либо из этих коэффициентов становится равен нулю, происходит перестановка или перенумерация неиз-

50. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Итерационные методы применяются для решения уравнений вида $f(x) = 0$.

Сначала исходное уравнение преобразуется к виду $x = \varphi(x)$, равносильного данному. Например $\varphi(x) = x + kf(x)$, k≠0. Затем рассматривается последовательность чисел $x_0, \dots, x_n$, заданных следующим образом: $x_0, x_1 = \varphi(x_0), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1})(1)$. При определенных условиях последовательность (1) сводится к решению уравнения $x = \varphi(x)$. Поскольку в процессе построения последовательности (1) производятся последовательные вычисления функции $\varphi(x)$, данный метод называется методом итераций.

Разновидности метода итерации.

Метод Ньютона (Касательных)

Пусть дана дважды дифференцируемая на отрезке [a,b] функция f(x), причем ее значения f(a) и f(b) имеют разные знаки, а первая и вторая производные не изменяют свои знаки на отрезке [a,b]. Построение начинают с x_0, равного a, если знак второй производной f(x) совпадает со знаком f(a), и с b в обратном случае. Дальнейшие члены вычисляются методом итерации по правилу (1).

Метод хорд.

Применяется, если первая производная функции на выбранном отрезке сохраняет свой знак, а значения функции на разных концах отрезка имеют разные знаки.

Метод хорд и касательных.

Строятся две последовательности — одна по методу хорд, вторая — по методу касательных, обе стремятся к искомому значению корня с разных сторон.

Квадратурные формулы.

51. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ. МЕТОД ЭЙЛЕРА

Задача Коши

Основной теоремой дифференциальных уравнений является теорема Коши о существовании и единственности задачи Коши.

Задачей Коши называется задача нахождения такого решения дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

что выполняется условие Коши:

$y(x_0) = y_0$, где y_0 и x_0 — заданные данные. Они также называются начальными данными или данными Коши. Начальное условие записывается в виде $y|_{x=x_0} = y_0$. Графическая интерпретация задачи Коши: найти интегральную кривую дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

проходящую через заданную точку (x_0, y_0).

Формулировка теоремы для случая дифференциального уравнения первого порядка звучит так: пусть функция $f(x,y)$ и частная производная

$$\frac{df(x,y)}{dy}$$

непрерывны в некоторой области D плоскости (x, y), точка (x_0, y_0) лежит в области D . Тогда существует решение задачи Коши; если $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ — два решения задачи Коши, то $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ совпадают в некоторой окрестности точки x_0 (единственность решения задачи Коши).

Метод Эйлера для дифференциальных уравнений первого порядка заключается в следующем: пусть имеется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dy} = f(x,y)$$

и начальные условия x_0, y_0.

52. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМБИНАТОРИКИ

Испытание — опыт, эксперимент.

Событие — результат, полученный при испытании.

Совместимые события — два события, появление одного из которых не исключает возможность появление второго в том же испытании.

Несовместимые события — взаимоисключающие результаты одного испытания.

Противоположные события — несовместимые события, но появление одного из них — обязательно. (А — событие, $\bar{A}$ — противоположное или дополнительное)

Достоверное событие — единственно возможный результат испытания.

Невозможное событие — результат, которого заведомо не может быть при проведении испытания.

Случайное событие — объективно может быть результатом испытания или не быть им.

Результатом испытания могут быть несколько событий.

Полная группа событий — все результаты испытания.

Элементарные события — результаты испытания, которые образуют полную группу попарно несовместимых и равно возможных событий.

Благоприятствующие события — одно событие(А) влечет за собой (В).

Вероятность события P(A) — отношение числа элементарных событий (m), благоприятствующих событию А, к числу всех элементарных событий (n): P(A) = m/n;

m — абсолютная частота события

n — относительная частота события

Статистическое определение вероятности:

Вероятностью события А является число P(A), около которого группируются значения относительной частоты при больших значениях n.

Квадратурные формулы применяются для приближенного вычисления определенных интегралов.

Формула трапеций.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

Формула Симпсона.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

где $h = \frac{b-a}{2n}, x_i = a + ih, i = 0,1; \ldots,2n$

Квадратичная формула Гаусса.

Применяется только на компьютерах в виду сложности вычисления из-за применения многочлена Лагранжа.

вестных таким образом, чтобы исключить равенство нулю диагональных коэффициентов.

На первом этапе, во всех уравнениях ниже первого при помощи умножения и сложения уравнений исключаются слагаемые с x_1, на втором этапе, во всех уравнениях ниже второго так же исключаются слагаемые x_2, и т.д. Если на каком-либо этапе получается равенство $0 = b_i$, при этом $b_i \neq 0$, то исходная система является несовместной, то есть не имеющей решений. Тогда часть неизвестных будут свободными, то есть могут принимать любые значения, а остальные однозначно определяются через свободные неизвестные.

Основные преимущества метода Гаусса:

1. Наименее трудоемкий
2. Дает возможность найти максимальное количество линейно независимых уравнений, т.е. ранг матрицы системы
3. Дает возможность установления совместности системы и нахождения решения в случае, если система совместна

Зависимые события – вероятность появления одного события зависит от появления второго.

Независимые события – вероятность появления одного события не зависит от появления второго.

Свойства вероятности события:

P(A)=1 для достоверного события, m=n

P(A)=0 для невозможного события, m=0

1>P(A)>0

Объединения (сумма) событий – событие, означающее появление хотя бы одного из событий (объединение событий A и B= $A \cup B$)

Пересечение (произведение) событий – событие, означающее появление обоих событий (пересечение событий A и B = $A \cap B$).

Разность событий – событие, означающее появление одного и не появление второго (разность событий A и B=A\B)

Размещения из n различных элементов по m элементов(m≤n) – комбинации из n элементов по m элементов, отличающиеся самими элементами или их порядком.

Перестановки из n различных элементов – размещения из n элементов по m элементов.

Сочетания из n различных элементов по m элементов – комбинации из данных n элементов по m элементов, отличающиеся хотя бы одним элементом.

Для нахождения решения на отрезке $[x_0,b]$, разделим этот отрезок на равных частей, шаг разбиения

$$h = \frac{b-x_0}{n},$$

получив ряд точек $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$. $\Delta x = h$. Пусть $y = \varphi(x)$ – приближенное решение данного уравнения, то есть $y_i = \varphi(x_i), i = 0,1,2, \ldots, n$.

Тогда $\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1}, i = 1,2, \ldots, n$, следовательно, в каждой из точек x_i, мы можем в исходном уравнении производную заменить соотношением конечных разностей:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x,y)$$

При $x = x_0$ имеем $\Delta y_0 = f(x_0, y_0)\Delta x$, отсюда находим $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$, аналогично вычисляются все y_i в точках x_i. Если соединить отрезками прямой точки $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$, то мы получим приближенное изображение кривой, называемое ломаной Эйлера. Данный метод применяется, если не требуется большой точности. Точность увеличивается путем увеличения точек разбиения функции.

Модифицированный метод Эйлера

Данный метод задается формулой:

$$y_{i+1} = y_k + f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + f_k\left(\frac{h}{2}\right)\right)h.$$

53. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина, если закон ее распределения неизвестен, изучается по ее числовым характеристикам, таким как математическое ожидание и дисперсия. Математическое ожидание M(X) дискретной случайной величины X с конечным числом значений, заданной законом распределения, — это сумма произведений всех возможных значений дискретной случайной величины X на вероятности им соответствующие.

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

Теорема

Математическое ожидание дискретной случайной величины X приблизительно равно среднему арифметическому всех значений случайной величины X при достаточно большом количестве испытаний.

Свойство математического ожидания:

1. Математические ожидания двух независимых (закон распределения одной из величин не зависит от значения другой) случайных величин(X,Y) равно произведению математических ожиданий этих величин(M(X) и M(Y)).
   M(XY) = M(X)M(Y)
2. Математическое ожидание суммы случайных величин X и Y равно сумме их математических ожиданий.
   $$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$$
3. Математическое ожидание разности X И Y равно разности их математических ожиданий
   M(X-Y) = M(X)-M(Y)
4. Математическое ожидание постоянной величины(C) равно значению этой величины
   M(C)=C
5. Постоянный множитель может быть вынесен за знак математического ожидания
   M(CX) = CM(X)

Отклонение случайной величины X от ее математического ожидания M(X) — это случайная величина X-M(X)

Теорема: Математическое ожидание отклонения M[X-M(X)]=0

54. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическое ожидание непрерывной случайной величины(X) с плотностью вероятности (F(X)) — величина несобственного интеграла в том случае, если он сходится.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Дисперсия непрерывной случайной величины(X) при M(X)=a, где a — математическое ожидание величины(X), а f(x) — плотность вероятности, является величиной несобственного интеграла в том случае, если он сходится.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)dx$$

Коэффициенты ковариации и корреляции: X и Y — случайные величины, их произведение XY, M(X,Y,XY) — математическое ожидание,

ух и уу — среднеквадратичные отклонения,

k(X,Y) — коэффициент ковариации

k(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y)

r(X,Y) — коэффициент корреляции

r(X,Y) = k(X,Y)/(ух Ч уу)

Свойства коэффициента корреляции r(X):

Если X,Y — независимые случайные величины, то r(X,Y)=0

Если X,Y — любые случайные величины, то -1≤r(X,Y)≤1

Если r(X,Y) = 1, то Y=aX+b, где a и b — const.

При большом количестве испытаний колебания значений теряет случайный характер — массовые случайные явления обладают свойствами устойчивости значений средних.

В таких случаях используются описанные теоремами Бернулли и Чебышева законы больших чисел.

55. СЛУЧАЙНАЯ ФУНКЦИЯ И КОВАРИАЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Случайные функции (процессы) — случайные величины, зависящие от времени (X(t)).

Свойства случайных функций:

1. При близких значениях t_1, t_2 случайные величины $X(t_1)$ и $X(t_2)$ — зависимы
2. При каждом конкретном значении времени $t=t_0$ для случайной функции X(t) будет определена случайная величина $X(t_0)$ с законом распределения f(X)

$X(t_0)$-сечение случайного процесса X(t) в точке t_0

Если у некоторого опыта X(t) результат $\mu(t)$, являющийся функцией из определенного класса L кусочно-гладких или непрерывных функций, в таком случае $\mu(t)$ — реализация (траектория случайного процесса X(t)), при этом он не является случайной функцией. Характеристиками случайных функций являются математическое ожидание и дисперсия случайной функции.

Математическое ожидание случайной функции X(t) — неслучайная функция MX(t), значение которой в каждой точки t_0 равно математическому ожиданию сечения $X(t_0)$ случайного процесса X(t). Дисперсия случайной функции X(t) — неслучайная функция DX(t), значение которой в каждой точке t_0 равно дисперсии сечения $X(t_0)$.

Среднеквадратичное отклонение $\sigma X(t)$ случайной функции X(t) равно квадратному корню его дисперсии. $\sigma X(t) = \sqrt{DX(t)}$

Ковариационная функция случайной функции X(t) — это неслучайная функция cov(s,t), ее значения в точке (s_0,t_0) равно ковариации случайных величин $X(s_0)$,$X(t_0)$ является сечением случайной функции X(t) в точках s_0 и t_0.

Нормированная вариационная функция X(t) — неслучайная функция rX(s,t), ее значение в каждой точке (s_0,t_0) равно коэффициенту корреляции случайных величин $X(s_0)$ и $X(t_0)$ в точках s_0 и t_0 соответственно.

56. ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ И ВЫБОРКА. ГЕНЕРАЛЬНЫЕ И ВЫБОРНЫЕ СРЕДНИЕ И ДИСПЕРСИИ

Статистическая совокупность относительно некоего количественного или качественного признака или объекта является множеством однородных объектов. Из статистической совокупности выбирается часть объектов. Эту совокупность называют генеральной. Объемом генеральной совокупности называется число входящих в нее объектов, объемом выборки — количество объектов выборки. Выборки подразделяется на повторные и бесповторные. В случае если выборка объективно отражает свойства генеральной совокупности, она считается репрезентативной. Извлечение выборки из генеральной совокупности X:

объект X_1 наблюдается n_1 раз,

объект X_k наблюдается n_k раз.

При этом объем выборки n будет равен $n_1+n_2+...+n_k=n$

$X_1, x_2,..., x_k$ — варианты, их последовательность в возрастающем порядке — вариационный ряд, $n_1,n_2,..., n_k$ — частоты. Относительные частоты — это отношение частот к объему выборки.

$$\frac{n_i}{n} = p_i^*, (i = 1,2,...,k)$$

$$p_1^* + p_2^* + \cdots + p_k^* = 1$$

Статистическое распределение выборки — перечень вариант и частот или относительных частот, соответствующих им. Графически оно изображается полигонами (графики, в которых значения вариант откладываются по оси OX, а значения частот по OY) и гистограммами (графики, где интервал значений изучаемого признака откладывается по оси OX, которая затем разбивается на части заданной h) в случае непрерывного распределения обследуемого признака или при большом числе вариант.

Генеральное среднее $\bar{x}_г$ — среднее арифметическое значение признака генеральной совокуп-

Теорема Бернулли:

m — количество наступлений события A в n — количестве независимых испытаний, а P — вероятность наступления события A в каждом испытании. Тогда при любых положительных значениях

$$\varepsilon\colon P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1$$

Теорема Чебышева:

Если X — любая случайная величина, ε – положительное число, то

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad \text{или}$$

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

В случае, если дисперсии случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ограничены C, при C = const,

$$D(X_i) \leq C, \ (i = 1,2,\ldots,n)$$

То есть при любом положительном ε вероятность выполнения $|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon$

при $\bar{X} = (X_1 + X_2 \ldots + X_n)/n$

будет близка к единице при n достаточно большом.

$\lim_{n\to\infty} P\{|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon\} = 1$

Помимо вышеперечисленных законов больших чисел при большом значении N используется центральная предельная теорема Ляпунова:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — одинаково распределенные, независимые случные величины, M(X)=a — их математическое ожидание, $P(X_i) = \sigma^2$ — дисперсия

При большом значении n распределение суммы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ близко к нормальному распределению.

Дисперсия дискретной случайной величины X [D(X)] равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания

$$D(X) = M[(X - M(X)^2)]$$

А значит, $D(X) = [X_1 - M(X)]^2 P_1 +$

$$[X_2 - M(X)]^2 P_2 + \cdots + [X_n - M(X)]^2 P_n$$

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянно величины D(C) при C=const равна нулю. D(C)=0

Дисперсия дискретной случайной величины X (D(X)) равна разности между математическим ожиданием квадрата величины X – $M(X^2)$ и квадратом ее математического ожидания $M^2(X)$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

2. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин

D(X+Y) = D(X)+D(Y)

3. Постоянный множитель может быть вынесен за знак дисперсии при возведении множителя в квадрат.

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

Среднее квадратичное отклонение случайной величины X — квадратичный корень из ее дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Начальный момент (V) порядка (k) случайной величины — математическое ожидание X^k, где k — натуральная величина.

$V_k = M(X^k)$

При этом

$\mu_k = M[(X - M(X))^k]$,

μ_k — центральный момент порядка k

ности.

$$\bar{x}_r = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{N}\right)$$

$$\bar{x}_r = 1/N \sum_{i=1}^{k} x_i N_i$$

Где Ni — частота при $x_i (k \leq n)$.

При $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различных и имеющих частоты, M(x) — Математическое ожидание, равное генеральной средней $M(x) = \bar{x}_r$

Выборочное среднее $\bar{x}_B$ — среднее арифметическое признака выборочной совокупности.

$$\bar{x}_B = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

$$\bar{x}_B = 1/n \sum_{i=1}^{k} x_i n_i$$

Где n — объем выборки.

Выборочные средние могут быть различными при одном объеме выборок. И являются возможными значениями — выборочной средней случайной величины $\bar{x}$, математическое ожидание которой равно генеральной средней $M(\bar{x}) = \bar{x}_r$

Ее дисперсия: $D(\bar{x}) = D(x/n)$

Ее генеральная дисперсия:

$$D_r = 1/N \sum_{i=1}^{k} (x_1 - \bar{x}_r)^2 N_i$$

Где n_i — частота, $x_i (k \leq n)$

Генеральное среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_r = \sqrt{D_r}$$

Дисперсия признака X: $D(x) = D_r$

Стационарная случайная функция — случайная функция n конечномерных функций, для распределения которой при любом значении t_0 справедливо:

$$Fn(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = Fn(t_1 + t_0, t_2 + t_0, \ldots, t_n + t_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Корреляционная функция случайной функции X(t) — функция

$$RX(s,t) = M((X(s) \times X(t)))$$

где математическое ожидание произведения случайных величин *X(s)* и *X(t) – M(X(s)X(t))*.

Для случайных функций X(t) и Y(t) корреляционная функция будет: RXY(s,t)=M(X(s)Y(t)) и covXY(s,t)= RXY(s,t)-M(X(t))M(Y(s))

В серии «Зачет» выходят книги:

- Высшая математика
- Предпринимательское право
- Международное право
- Уголовно-исполнительное право
- Коммерческое право
- Криминология
- Прокурорский надзор
- Страхование
- Микроэкономика
- Макроэкономика
- Финансы организаций
- Анализ финансовой отчетности
- Теория бухгалтерского учета
- Деньги, кредит, банки
- Бухгалтерский финансовый учет
- Бухгалтерский управленческий учет
- Аудит
- Банковское дело
- Инвестиции
- Концепции современного естествознания
- Римское право
- Международное частное право


ISBN 978-5-17-070480-4
9 785170 704804